第 030 講 力学的エネルギーの保存

この講でできるようになること

- 系・基準高さ・始状態と終状態を決め、力学的エネルギーを構成する量を整理できる。
- 重力・ばね力以外の力がする仕事を調べ、力学的エネルギー保存則を使える条件を判断できる。
- 運動エネルギー・重力による位置エネルギー・弾性エネルギーの変化を対応づけ、速さ・高さ・ばねの変位を求められる。
- 計算結果の物理的な意味を確かめ、到達不能な状態や保存則を使えない場面を見分けられる。

1. 速さが変わっても、エネルギーは保存されるのか

高い場所から物体を落とすと、落下するにつれて速さが大きくなる。物体の運動エネルギーは増加するが、その分のエネルギーはどこから来るのだろうか。

反対に、物体を上向きに投げると、上昇するにつれて速さは小さくなる。運動エネルギーが減少したからといって、エネルギーそのものが消えたわけではない。

この二つの運動では、運動エネルギーと重力による位置エネルギーが互いに変化している。空気抵抗などを無視できる場合、一方が増えた分だけ他方が減る。

ばねにつながれた物体にも同じ考え方が使える。ばねの伸び縮みと物体の運動を、弾性エネルギーを含めて考えるのである。

ここで重要なのは、**それぞれのエネルギーが一定なのではなく、それらの和が一定になる場合がある**という点である。

ただし、どのような運動でも和が一定になるわけではない。保存則を使う前に、対象と条件を決める必要がある。

2. 力学的エネルギーを構成する三つの量

この講では、物体を大きさのない点として扱う質点モデルを用いる。重力については地表付近で重力加速度の大きさ g が一定とみなし、ばねについては質量を無視できる理想的な線形ばねを考える。

これまでに学んだ三つのエネルギーを、次のように表す。

力学的エネルギー

運動エネルギー K、重力による位置エネルギー U_g、弾性エネルギー U_s の和を、この講で扱う**力学的エネルギー** E とする。

$$E = K + U_g + U_s$$

各エネルギーは次の式で求める。

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$U_g = mgh$$

$$U_s = \frac{1}{2}kx^2$$

ここで、m は物体の質量、v は速さ、h は固定した基準高さから測った鉛直方向の高さ、k はばね定数、x は自然長からの符号付きの伸びを表す。縮んでいるときの x は負である。

エネルギーの単位はすべて J（ジュール）である。

量	記号	単位	この講での性質
質量	m	kg	正の値
速さ	v	m/s	$v \geq 0$
重力加速度の大きさ	g	m/s^2	正の値
基準からの高さ	h	m	正・0・負を取り得る
ばね定数	k	N/m	正の値
自然長からの伸び	x	m	伸びは正、縮みは負
各エネルギー	K, U_g, U_s	J	基準や種類によって符号の扱いが異なる

三つのエネルギーの符号

速さは負にならず、質量は正であるため、運動エネルギーは必ず $K \geq 0$ となる。

また、理想的なばねでは、伸びても縮んでも $x^2 \geq 0$ であるため、弾性エネルギーは $U_s \geq 0$ となる。自然長では $x = 0$ なので、弾性エネルギーは 0 J である。

一方、重力による位置エネルギーは基準高さの取り方によって負になることがある。例えば、基準より 1.0 m 低い位置を $h = -1.0\,\mathrm{m}$ と定めれば、$U_g = mgh$ は負になる。

負の位置エネルギーは誤りではない。しかし、**負の運動エネルギーは、このモデルでは実現できない**。

3. 保存則を使う前に決めること

同じ物体の運動であっても、考える範囲や条件が異なれば、使うべきエネルギーの式が変わる。

系を決める

物理では、考える対象をまとめたものを**系**という。

重力による位置エネルギーを含めるときは、物体だけでなく地球も含めて考える。ばねの弾性エネルギーも含めるときは、必要に応じてばねも系に含める。

この講では、質点モデルの物体・地球・必要なばねを一つの系として扱う。重力とばね力は、この系の中でエネルギーをやり取りする力として考える。

高さとばねの基準を固定する

重力による位置エネルギーの基準高さは、始状態から終状態まで同じものを使う。

例えば、床を $h = 0\,\mathrm{m}$ としたならば、途中で机の上を新しい基準に変更してはいけない。基準を変更する場合は、すべての状態の高さを同じように変更する必要がある。

ばねの変位 x は自然長を $x = 0\,\mathrm{m}$ として測る。物体がばねに触れていない場合、自然長にあるばねの弾性エネルギーは $0\,\mathrm{J}$ である。

始状態と終状態を決める

力学的エネルギーを比較するときは、まず始状態 A と終状態 B を決める。

確認する項目	始状態 A	終状態 B
系	物体・地球・必要なばね	A と同じ系
基準高さ	固定した基準を使用	A と同じ基準
速さ	v_A	v_B
高さ	h_A	h_B
ばねの変位	x_A	x_B
運動エネルギー	K_A	K_B
重力による位置エネルギー	$U_{g,A}$	$U_{g,B}$
弾性エネルギー	$U_{s,A}$	$U_{s,B}$

ばねがない場合、U_s は両状態とも $0\,\mathrm{J}$ とする。高さが変わらない水平運動では、基準をその水平面に取れば U_g を両状態とも $0\,\mathrm{J}$ にできる。

表のうち不要な項を $0\,\mathrm{J}$ とする場合も、その理由を確認することが重要である。

4. 力学的エネルギー保存則が成り立つ理由

第 027 講で扱った仕事と運動エネルギーの関係を使うと、物体の運動エネルギーの変化は、物体に働く力がした仕事の合計に等しい。

重力がした仕事を W_g、ばね力がした仕事を W_s、それ以外の力がした仕事の合計を W_{other} とすると、

$$\Delta K = W_g + W_s + W_{\mathrm{other}}$$

である。

重力とばね力は**保存力**である。保存力がした仕事は、対応する位置エネルギーの減少量に等しい。

$$W_g = -\Delta U_g$$

$$W_s = -\Delta U_s$$

これらを運動エネルギーの式に代入すると、

$$\Delta K = -\Delta U_g - \Delta U_s + W_{\text{other}}$$

$$\Delta K + \Delta U_g + \Delta U_s = W_{\text{other}}$$

となる。

したがって、次の関係が得られる。

$$\Delta\left(K + U_g + U_s\right) = W_{\text{other}}$$

この式は、力学的エネルギーの変化と、重力・ばね力以外の力がした仕事の合計を結びつけている。

力学的エネルギー保存則

物体・地球・必要なばねを系とし、重力・ばね力以外の力がする仕事の合計が 0 J であれば、始状態 A と終状態 B の力学的エネルギーは等しい。

$$W_{\text{other}} = 0$$

のとき、

$$K_A + U_{g,A} + U_{s,A} = K_B + U_{g,B} + U_{s,B}$$

すなわち、

$$E_A = E_B$$

が成り立つ。

途中のすべての状態で力学的エネルギーが一定であるというためには、比較するどの区間でも重力・ばね力以外の力の仕事の合計が 0 J であることが必要である。

「力が働いている」と「仕事をする」は違う

物体に力が働いていても、その力が仕事をするとは限らない。

例えば、固定された滑らかな斜面を物体が滑るとき、斜面から受ける垂直抗力は、接触している物体の変位と直交する。そのため、垂直抗力がする仕事は 0 J である。

物体には重力も垂直抗力も働いているが、垂直抗力が力学的エネルギーを増減させるわけではない。重力を位置エネルギーに含めて考えれば、力学的エネルギー保存則を使える。

ただし、これは**固定された滑らかな面で、物体がその面と接触しながら運動する**場合の説明である。

支持面自体が動いている場合には、垂直抗力が物体に仕事をすることがある。また、物体が面から離れれば、その後は垂直抗力が働かず、実際の運動経路も変わり得る。

接触を失ったことだけで力学的エネルギーが保存しなくなるわけではない。離れた後に重力だけが働くなら保存則は引き続き使えるが、接触して進むことを前提とした元の経路や条件をそのまま使ってはいけない。

保存則を使えない場面

物体に動摩擦力や空気抵抗が働いて仕事をする場合、あるいは外部から加えた力が正や負の仕事をする場合には、一般に $E_A = E_B$ としてはいけない。

このときは、重力・ばね力以外の力がする仕事を考慮する必要がある。本講ではその詳しい計算には進まず、まず保存則が使えるかどうかを判断する。

力学的エネルギーが減少しても、エネルギー全体が消滅したわけではない。例えば、摩擦によって物体や周囲の内部エネルギーなどに移ることがある。

ここで「保存力以外の力が存在しない」という条件と、「保存力以外の力がする仕事の合計が 0 J」という条件は同じではない。

後者の方が広い条件である。垂直抗力が存在していても仕事が 0 J なら、保存則を使えるからである。

5. 保存則で問題を解くときの判断

力学的エネルギーの問題では、最初から公式に数値を代入するのではなく、次の順序で整理する。

1. **系を決める**。 物体・地球・必要なばねを同じ系として扱う。
2. **他の力の仕事を調べる**。 重力とばね力以外の仕事の合計が 0 J か確認する。
3. **基準と状態を固定する**。 高さの基準、ばねの自然長、始状態 A と終状態 B を決める。
4. **エネルギー表を作る**。 両状態の K, U_g, U_s を書き、保存できるときだけ $E_A = E_B$ を使う。
5. **物理的に確かめる**。 単位、速さの非負性、実際に到達できる状態かどうかを判断する。

この順序を守れば、落下・斜面・ばねなど、見た目が異なる運動にも同じ考え方を適用できる。

6. 重力による位置エネルギーと運動エネルギー

空気抵抗がなく、重力だけが仕事をする落下運動では、重力による位置エネルギーが減少した分だけ運動エネルギーが増加する。

ばねを使わないため、弾性エネルギーは常に 0 J である。

したがって、

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B$$

を使える。

物体が落下するとき、h は減少し、通常は速さ v が増加する。この変化をエネルギーの移り変わりとして説明できる。

1

質量 2 kg の小球を、地面から高さ 5 m の位置 A で静かに放した。地面に達する直前の状態を B とする。

重力加速度の大きさを $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ とし、空気抵抗は無視する。地面を位置エネルギーの基準とする。

(1) 小球の力学的エネルギーを求めよ。

(2) 地面に達する直前の速さを求めよ。

(3) 高さ 2 m を通過するときの重力による位置エネルギー、運動エネルギー、速さを求めよ。

解答・解説

系は小球と地球であり、仕事をする力は重力だけである。空気抵抗はなく、他の力の仕事は 0 J なので、力学的エネルギーは保存する。

ばねは使わないため、すべての状態で $U_s = 0\,\mathrm{J}$ である。

まず、始状態 A と終状態 B を整理する。

量	状態 A	状態 B
高さ	5 m	0 m
速さ	0 m/s	求める値
K	0 J	求める値
U_g	100 J	0 J
U_s	0 J	0 J

(1) A では静止しているため、運動エネルギーは 0 J である。

$$\begin{aligned} E_A &= 0\,\mathrm{J} \\ &\quad +(2\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(5\,\mathrm{m}) \\ &= 100\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

よって、力学的エネルギーは 100 J である。

(2) B では高さが 0 m なので、位置エネルギーは 0 J になる。保存則より、

$$K_B + 0\,\mathrm{J} = 100\,\mathrm{J}$$
$$K_B = 100\,\mathrm{J}$$

したがって、

$$\frac{1}{2}(2\,\mathrm{kg})v_B^2 = 100\,\mathrm{J}$$

より、

$$v_B^2 = 100\,\mathrm{m^2/s^2}$$

である。速さは非負なので、

$$v_B = 10\,\mathrm{m/s}$$

となる。

(3) 高さ 2 m の状態を P とする。まず位置エネルギーは、

$$U_{g,P} = (2\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(2\,\mathrm{m})$$
$$= 40\,\mathrm{J}$$

である。

力学的エネルギーは 100 J のままなので、

$$K_P = 100\,\mathrm{J} - 40\,\mathrm{J}$$
$$= 60\,\mathrm{J}$$

となる。

$$\frac{1}{2}(2\,\mathrm{kg})v_P^2 = 60\,\mathrm{J}$$

より、

$$v_P^2 = 60\,\mathrm{m^2/s^2}$$

したがって、

$$v_P = \sqrt{60}\,\mathrm{m/s}$$

である。

高さが低くなるにつれ、位置エネルギーが運動エネルギーに移っていることが分かる。

©ミライコーチング

質量を変えると落下の速さはどうなるか

例題 1 で小球の質量を 4 kg に変え、同じ高さから静かに放した場合、最初の力学的エネルギーは 200 J になる。

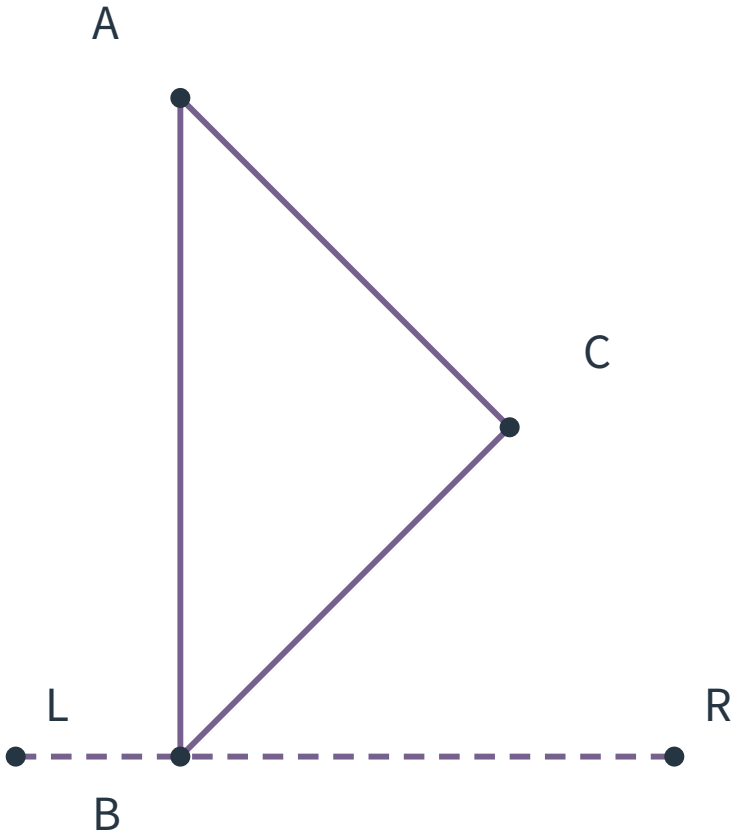
しかし、保存則の両辺にある質量 m を消去できるため、同じ高さまで落下したときの速さは変わらない。

これは、空気抵抗を無視し、同じ初速・同じ高さの差で比較した結果である。質量を変えても力学的エネルギーの値そのものは同じになる、という意味ではない。

7. 経路が違っても速さが等しくなる場合

物体が高い場所から低い場所へ移動するとき、通る経路は一つとは限らない。

例えば、同じ出発点 A から同じ到着点 B まで、異なる滑らかな道筋を通る場合を考える。



経路の模式図（縮尺なし）。AB と ACB は現実には滑らかにつながる固定された経路を略記したものである。物体は全区間で面との接触を保ち、重力以外の力の仕事の合計は 0 J とする。破線 LR は高

さの基準線であり、L と R は物体ではない。線は力の矢印ではなく、図上の長さから高さや距離を測定しない。

この図では、A から B へ直接進む経路と、途中の C を通って B へ進む経路を比較する。

経路が異なっても、始状態と終状態の高さが同じで、初めの速さも同じならば、力学的エネルギー保存則から求める終状態の速さは等しくなる。

2

質量 1 kg の小球が、図の A から B へ二つの経路のいずれかを通って移動する。

A の高さは 2 m、B の高さは 0 m、A での速さは 2 m/s である。

両経路とも固定された滑らかな面で構成され、現実の接続部分は滑らかである。小球は各経路の全区間で接触を保ち、垂直抗力は仕事をしない。空気抵抗などもなく、重力以外の力の仕事の合計は 0 J である。

重力加速度の大きさを $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。B の高さを位置エネルギーの基準とする。

(1) B に達したときの速さを求めよ。

(2) 二つの経路で B の速さが等しい理由を説明せよ。

(3) 二つの経路の所要時間も等しいといえるか。

解答・解説

系は小球と地球である。両経路で他の力の仕事は 0 J なので、保存則が成り立つ。ばねはないため $U_s = 0\,\mathrm{J}$ である。

量	状態 A	状態 B
高さ	2 m	0 m
速さ	2 m/s	求める値
K	2 J	求める値
U_g	20 J	0 J
U_s	0 J	0 J

(1) A の力学的エネルギーは、

$$\begin{aligned} E_A &= \frac{1}{2}(1\,\mathrm{kg})(2\,\mathrm{m/s})^2 \\ &\quad +(1\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(2\,\mathrm{m}) \\ &= 2\,\mathrm{J} + 20\,\mathrm{J} \\ &= 22\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

B では位置エネルギーが 0 J になるため、

$$K_B = 22\,\mathrm{J}$$

となる。

$$\frac{1}{2}(1\,\mathrm{kg})v_B^2 = 22\,\mathrm{J}$$

より、

$$v_B^2 = 44\,\mathrm{m^2/s^2}$$

したがって、

$$v_B = 2\sqrt{11}\,\mathrm{m/s}$$

である。

(2) 重力がする仕事は高さの変化だけで決まり、途中の経路の形には依存しない。また、どちらの経路でも垂直抗力は仕事をしない。

したがって、A と B の高さ・初速が等しければ、保存則から B での運動エネルギーが同じになる。質量も同じなので、B での速さは等しい。

(3) 所要時間が等しいとはいえない。

速さの変化の仕方や経路の長さは異なり得るためである。力学的エネルギー保存則だけでは、通過時間は決まらない。

接触条件を忘れない

図は実際の装置の寸法を表すものではない。折れ線の角で衝突する装置を想定しているわけでもない。

物体が面から離れれば、その後の経路を改めて考える必要がある。接触を保つことを仮定した経路比較を、接触しない実際の運動にそのまま当てはめてはいけない。

8. ばねと運動エネルギーの交換

水平な滑らかな面で、物体が理想的なばねにつながれている場合を考える。

このとき、ばねの弾性エネルギーと物体の運動エネルギーが互いに変化する。

水平面を重力による位置エネルギーの基準にすれば、$U_g = 0\,\mathrm{J}$ がすべての状態で成り立つ。

ばねの力以外に仕事をする力がなければ、

$$\frac{1}{2}mv_A^2+\frac{1}{2}kx_A^2=\frac{1}{2}mv_B^2+\frac{1}{2}kx_B^2$$

である。

ばねが最も縮んだ位置や最も伸びた位置では、物体はいったん停止して向きを変える。その瞬間の速さは $0\,\mathrm{m/s}$ である。

しかし、そこでばねの力が $0\,\mathrm{N}$ になるとは限らない。

3

質量 $0.50\,\mathrm{kg}$ の物体が、ばね定数 $200\,\mathrm{N/m}$ の理想的なばねにつながれている。

ばねは水平に設置され、物体は滑らかな水平面上を運動する。ばねは運動中ずっと物体につながっており、比例関係が成り立つ範囲で伸び縮みする。摩擦はない。

自然長からの伸びを x とし、縮む向きを負とする。初めに $x_A=-0.10\,\mathrm{m}$ まで縮め、静かに放した。

(1) 初めの力学的エネルギーを求めよ。

(2) ばねが自然長を通過するときの速さを求めよ。

(3) $x=+0.060\,\mathrm{m}$ のときの弾性エネルギー、運動エネルギー、速さを求めよ。

(4) 最大の伸びと、その位置でのばねの力を求めよ。また、その瞬間の加速度は $0\,\mathrm{m/s^2}$ か。

解答・解説

系は物体・地球・ばねである。水平面からの垂直抗力と重力は仕事をせず、ばね力以外の仕事は $0\,\mathrm{J}$ である。

水平面を高さの基準とするため、$U_g=0\,\mathrm{J}$ である。

まず、初期状態 A と自然長の状態 B を整理する。

量	状態 A	状態 B
速さ	$0\,\mathrm{m/s}$	求める値
ばねの変位	$-0.10\,\mathrm{m}$	$0\,\mathrm{m}$
K	$0\,\mathrm{J}$	求める値
U_g	$0\,\mathrm{J}$	$0\,\mathrm{J}$
U_s	$1.0\,\mathrm{J}$	$0\,\mathrm{J}$

(1) 初めは静止しているので、力学的エネルギーは弾性エネルギーだけである。

$$\begin{aligned}E_A&=\frac{1}{2}(200\,\mathrm{N/m})(-0.10\,\mathrm{m})^2\\&=1.0\,\mathrm{J}\end{aligned}$$

(2) 自然長では弾性エネルギーが 0 J になる。したがって、

$$K_B = 1.0\,\mathrm{J}$$

である。

$$\frac{1}{2}(0.50\,\mathrm{kg})v_B^2 = 1.0\,\mathrm{J}$$

より、

$$v_B^2 = 4.0\,\mathrm{m^2/s^2}$$

したがって、

$$v_B = 2.0\,\mathrm{m/s}$$

となる。

(3) $x = +0.060\,\mathrm{m}$ の状態を P とする。

$$\begin{aligned} U_{s,P} &= \frac{1}{2}(200\,\mathrm{N/m})(+0.060\,\mathrm{m})^2 \\ &= 0.36\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

力学的エネルギーは一定なので、

$$\begin{aligned} K_P &= 1.0\,\mathrm{J} - 0.36\,\mathrm{J} \\ &= 0.64\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

$$\frac{1}{2}(0.50\,\mathrm{kg})v_P^2 = 0.64\,\mathrm{J}$$

より、

$$v_P^2 = 2.56\,\mathrm{m^2/s^2}$$

したがって、

$$v_P = 1.6\,\mathrm{m/s}$$

である。

(4) 最大の伸びの位置では、物体の速さが 0 m/s になる。

そのため、すべての力学的エネルギーが弾性エネルギーとなる。

$$\frac{1}{2}(200\,\mathrm{N/m})x^2 = 1.0\,\mathrm{J}$$

より、

$$x^2 = 0.010\,\mathrm{m}^2$$

である。最大の伸びを問われているので、

$$x = +0.10\,\mathrm{m}$$

となる。

この位置で、ばねが物体に及ぼす力は、

$$\begin{aligned} F_s &= -kx \\ &= -(200\,\mathrm{N/m})(+0.10\,\mathrm{m}) \\ &= -20\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

である。

水平面上で他の水平方向の力はないため、加速度は、

$$\begin{aligned} a &= \frac{-20\,\mathrm{N}}{0.50\,\mathrm{kg}} \\ &= -40\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

となる。

したがって、最大の伸びの位置で速さは 0 m/s であるが、加速度は 0 m/s² ではない。ばねの力によって物体の運動方向が変わる。

速度が 0 でも加速度が 0 とは限らない

物体が最大の伸びや最大の縮みの位置に達するとき、いったん速度は 0 になる。しかし、ばねは自然長へ戻そうとする力を及ぼしている。

速度はその瞬間の運動の状態を、加速度は速度の変化を表す。二つは異なる物理量である。

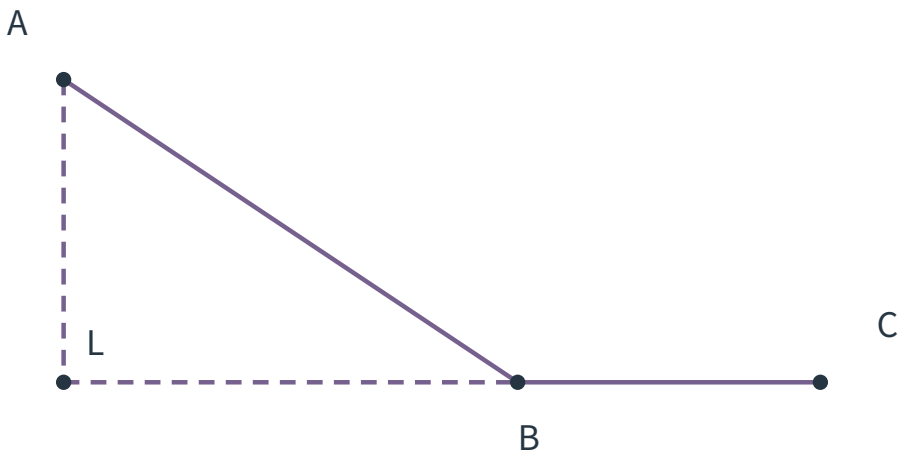
力学的エネルギーから最大変位を求めた後、必要なら力の向きと運動方程式から加速度を判断する。

9. 重力とばね力の両方が働く場合

物体が高い場所から滑らかな斜面を下り、水平面上のばねを縮める場面では、三つのエネルギーを同時に考える。

最初は重力による位置エネルギーが大きく、斜面を下ると運動エネルギーが増える。ばねを縮め始めると、今度は運動エネルギーが弾性エネルギーへ移っていく。

重力とばね力の両方が仕事をしていても、それらを系の中の位置エネルギーとして扱い、他の力の仕事が 0 J なら、力学的エネルギーの和は保存される。



重力からばねへのエネルギーの移り変わりを示す状態位置の模式図（縮尺なし）。A から B への実際の経路は滑らかにつながり、物体は全区間で支持面との接触を保つ。B から C ではばねと接触して圧縮し、重力・ばね力以外の力の仕事の合計は 0 J である。ばねや物体の実形状は省略しており、図上の長さから高さや圧縮量を測定しない。

4

質量 1.0 kg の小物体を、水平面から高さ 0.80 m の A で静かに放す。小物体は固定された滑らかな経路を下り、水平面上に設置されたばねに接触する。

水平面上の B は、ばねに初めて触れる自然長の位置である。ばねは固定されており、ばね定数は 400 N/m とする。物体はその後もばねとの接触を保って圧縮し、最大圧縮位置 C に達する。

経路の接続は滑らかで、物体は支持面との接触を保つ。空気抵抗・摩擦・衝突によるエネルギー損失はなく、ばねの質量も無視する。

重力加速度の大きさを $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ とし、水平面を高さ $h = 0\,\mathrm{m}$ の基準とする。B と C はいずれも同じ高さであり、圧縮を負の変位とする。

(1) A での力学的エネルギーを求めよ。

(2) B での物体の速さを求めよ。

(3) C でのばねの最大圧縮量を求めよ。

解答・解説

系は小物体・地球・ばねである。重力とばね力以外の力がする仕事の合計は 0 J なので、A から C まで力学的エネルギーは保存する。

ばねに触れる前はばねが自然長にあるため、弾性エネルギーは 0 J である。最大圧縮位置 C では速さが 0 m/s になる。

量	状態 A	状態 B	状態 C
高さ	0.80 m	0 m	0 m
速さ	0 m/s	求める値	0 m/s
ばねの変位	未接触・自然長	0 m	求める負の値
K	0 J	求める値	0 J
U_g	8.0 J	0 J	0 J
U_s	0 J	0 J	求める値

(1) A では静止しており、ばねも自然長にあるので、

$$\begin{aligned} E_A &= (1.0\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(0.80\,\mathrm{m}) \\ &= 8.0\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

(2) B では高さが 0 m で、ばねはまだ圧縮されていない。

したがって、重力による位置エネルギーと弾性エネルギーはいずれも 0 J であり、

$$K_B = 8.0\,\mathrm{J}$$

となる。

$$\frac{1}{2}(1.0\,\mathrm{kg})v_B^2 = 8.0\,\mathrm{J}$$

より、

$$v_B^2 = 16\,\mathrm{m^2/s^2}$$

したがって、

$$v_B = 4.0\,\mathrm{m/s}$$

である。

(3) C では物体がいったん停止するため、運動エネルギーは 0 J である。また、C の高さは B と同じ 0 m なので、位置エネルギーも 0 J である。

したがって、

$$U_{s,C} = 8.0\,\mathrm{J}$$

となる。

$$\frac{1}{2}(400\,\mathrm{N/m})x_C^2 = 8.0\,\mathrm{J}$$

より、

$$x_C^2 = 0.040\,\mathrm{m}^2$$

である。

C ではばねが縮んでいるので、

$$x_C = -0.20\,\mathrm{m}$$

となる。

求める最大圧縮量は、変位の大きさであるため、

$$0.20\,\mathrm{m}$$

である。

三つの状態のエネルギーを整理すると、次のようになる。

状態	K	U_g	U_s	E
A	0 J	8.0 J	0 J	8.0 J
B	8.0 J	0 J	0 J	8.0 J
C	0 J	0 J	8.0 J	8.0 J

重力による位置エネルギーが運動エネルギーへ移り、さらに弾性エネルギーへ移ったことが分かる。

なお、C は水平面上にある。最大圧縮量 0.20 m を高さと混同してはいけない。

10. エネルギーから到達できるかを判断する

保存則から速さを計算するとき、必ずしも実数の答えが得られるとは限らない。

例えば、物体を上向きに投げたとき、十分な初速がなければ、高い場所まで到達できない。

ある高さにおける運動エネルギーを計算して負になった場合、単に「速さが負になる」という意味ではない。運動エネルギーは負になれないため、**その高さには与えられた条件では到達できない**という意味である。

最高点と加速度

鉛直上向きに投げた物体は、最高点で一瞬速度が 0 m/s になる。

しかし、最高点でも重力は下向きに働いている。空気抵抗を無視すれば、加速度は下向きで、その大きさは g のままである。

したがって、最高点で速度が 0 になっても、加速度まで 0 になるわけではない。

位置エネルギーの基準を変えた場合

重力による位置エネルギーの基準を変えると、各状態の U_g と E の数値は変わる。

しかし、始状態と終状態で同じ基準を使えば、位置エネルギーの差は変わらない。そのため、求められる速さや到達する高さの差も変わらない。

エネルギーの絶対的な数値よりも、**同じ基準で比較したエネルギーの変化**が運動を判断するために重要なのである。

エネルギーから分かることと分からないこと

力学的エネルギー保存則は、二つの状態における速さ・高さ・ばねの変位の関係を求めるために使える。

しかし、エネルギーの値だけでは、物体がどちら向きに進んでいるか、ある位置にいつ到達するか、面との接触を維持できるかまでは決まらない。

エネルギーから分かる量と、運動の向き・力・接触条件などから別に判断すべき量を区別することが必要である。

演習問題

1

質量 2 kg の小球が、地面から高さ 3 m の位置 A を速さ 4 m/s で下向きに通過した。その後、地面から高さ 1 m の位置 B を通過する。

小球と地球を系とし、空気抵抗は無視する。地面を位置エネルギーの基準とし、$g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。

(1) A での運動エネルギー、重力による位置エネルギー、力学的エネルギーをそれぞれ求めよ。

(2) B での運動エネルギーを求めよ。

(3) B での速さを求めよ。

(4) A での初速を無視して計算してはいけない理由を説明せよ。

2

質量 1.0 kg の小球を、地面から高さ 0 m の A で鉛直上向きに速さ 6.0 m/s で投げた。

小球と地球を系とし、空気抵抗は無視する。初めは A を高さの基準とし、$g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。

(1) A での力学的エネルギーと、最高点の高さを求めよ。

(2) 高さ 1.0 m にあるときの運動エネルギーと速さを求めよ。また、上昇中と下降中で速さは等しいか。

(3) 高さ 2.0 m に到達できるかを、運動エネルギーの値を求めて判断せよ。

(4) 位置エネルギーの基準を A より 1.0 m 高い位置へ変更した。このときの A と最高点の新しい高さ、および A での力学的エネルギーを求めよ。

(5) 最高点で加速度は $0\,\mathrm{m/s^2}$ になるか。理由を説明せよ。

©ミライコーチング

3

次の各場面について、物体・地球・必要なばねを系とする。

重力・ばね力以外の力の仕事を考え、$E_A = E_B$ とする単純な力学的エネルギー保存則を使えるか判断せよ。使えない場合や条件だけでは判断できない場合は、その理由も説明せよ。

(1) 固定された滑らかな斜面を、物体が接触を保ちながら滑り下りる。垂直抗力は仕事をしない。

(2) 粗い斜面を物体が滑り、動摩擦力が負の仕事をする。

(3) 空気抵抗を受けながら小球が落下し、空気抵抗が負の仕事をする。

(4) 固定された滑らかな面から物体が離れ、その後は重力だけを受けて空中を運動する。空気抵抗はない。

(5) 外部から物体を押す力が正の仕事をする。重力・ばね力以外の仕事の合計は正である。

(6) 物体が滑らかな面を下り、その後ばねを縮める。経路は滑らかにつながり、全区間で支持面との接触を保つ。ばねとの接触は理想的で、重力・ばね力以外の仕事は 0 J である。

(7) 物体が動いている支持面から垂直抗力を受ける。垂直抗力が物体にした仕事の値は与えられていない。

4

質量 1.0 kg の小球が、高さの基準点 A を下向きに速さ 2.0 m/s で通過した。

空気抵抗はなく、小球には重力だけが働く。A を $h = 0\,\mathrm{m}$ とし、$g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。小球と地球を系とする。

A より 0.30 m 低い位置を B、A より 0.30 m 高い位置を C とする。

(1) A での力学的エネルギーを求めよ。

(2) B での重力による位置エネルギー、運動エネルギー、速さを求めよ。

(3) C での運動エネルギーを保存則から形式的に計算し、C に到達できるか判断せよ。

(4) B での位置エネルギーが負になることと、C での運動エネルギーの計算結果が負になることの意味の違いを説明せよ。

©ミライコーチング

5

質量 2.0 kg の物体が、ばね定数 100 N/m の理想的なばねにつながれている。

ばねは水平に設置され、物体は摩擦のない水平面上で運動する。ばねは常に物体につながれ、比例関係の成り立つ範囲で伸び縮みする。

自然長からの伸びを正、縮みを負とする。初めにばねを $x_A = -0.20\,\mathrm{m}$ まで縮め、物体を静かに放した。水平面を重力による位置エネルギーの基準とする。

(1) 初めの力学的エネルギーを求めよ。

(2) 自然長を通過するときの速さを求めよ。

(3) $x = +0.10\,\mathrm{m}$ における弾性エネルギー、運動エネルギー、速さを求めよ。

(4) 最大の伸びを求めよ。また、その位置でのばねの力と加速度を、伸びを正方向として求めよ。

6

質量 1.5 kg の小物体を、水平面から高さ 0.40 m の位置 A で静かに放す。

小物体は固定された滑らかな経路を下り、水平面上の位置 B で、ばね定数 300 N/m の水平な理想ばねに初めて接触する。ばねは自然長にあり、その後は物体との接触を維持して圧縮される。

斜面から水平面への接続は滑らかで、物体は支持面との接触を全区間で保つ。空気抵抗・摩擦・衝突によるエネルギー損失はない。ばねの質量は無視する。

水平面を高さ 0 m とし、$g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。ばねの圧縮を負の変位とする。

(1) A での力学的エネルギーを求めよ。

(2) B に到達したときの速さを求めよ。

(3) 最大圧縮位置 C での圧縮量を求めよ。

(4) A・B・C の各状態で、K, U_g, U_s の値を表に整理し、力学的エネルギーが保存されることを確認せよ。

7

力学的エネルギーの保存について、次の記述 A〜D から**正しいものを一つ**選べ。また、残りが正しくない理由を説明せよ。

A. 物体に力が働いているとき、力学的エネルギーは必ず保存されない。

B. 物体の速さが一定でも、力学的エネルギーが変化することがある。

C. 基準より低い位置では、重力による位置エネルギーを負の値にしてはいけない。

D. 始状態と終状態の力学的エネルギーが等しければ、どのような経路でも所要時間は必ず等しい。

©ミライコーチング

演習問題の解答・解説

1

(1) 系は小球と地球であり、空気抵抗がないため重力以外の仕事は 0 J である。したがって力学的エネルギーは保存する。

ばねはないため $U_s = 0\,\mathrm{J}$ である。

量	状態 A	状態 B
高さ	$3\,\mathrm{m}$	$1\,\mathrm{m}$
速さ	$4\,\mathrm{m/s}$	求める値
K	$16\,\mathrm{J}$	求める値
U_g	$60\,\mathrm{J}$	$20\,\mathrm{J}$
U_s	$0\,\mathrm{J}$	$0\,\mathrm{J}$

A での運動エネルギーは、

$$\begin{aligned} K_A &= \frac{1}{2}(2\,\mathrm{kg})(4\,\mathrm{m/s})^2 \\ &= 16\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

重力による位置エネルギーは、

$$\begin{aligned} U_{g,A} &= (2\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(3\,\mathrm{m}) \\ &= 60\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

したがって、

$$\begin{aligned} E_A &= 16\,\mathrm{J} + 60\,\mathrm{J} \\ &= 76\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

答え： $K_A = 16\,\mathrm{J}$、$U_{g,A} = 60\,\mathrm{J}$、$E_A = 76\,\mathrm{J}$。

(2) B での位置エネルギーは、

$$\begin{aligned} U_{g,B} &= (2\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(1\,\mathrm{m}) \\ &= 20\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

保存則より、

$$\begin{aligned} K_B &= 76\,\mathrm{J} - 20\,\mathrm{J} \\ &= 56\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

答え： 56 J。

(3) B での運動エネルギーを速さの式に代入すると、

$$\frac{1}{2}(2\,\mathrm{kg})v_B^2 = 56\,\mathrm{J}$$

である。

したがって、

$$v_B^2 = 56\,\mathrm{m^2/s^2}$$

となる。速さは非負なので、

$$v_B = 2\sqrt{14}\,\mathrm{m/s}$$

である。

答え： $2\sqrt{14}\,\mathrm{m/s}$。

(4) A ですでに小球は速さ $4\,\mathrm{m/s}$ で運動している。そのため、A で $16\,\mathrm{J}$ の運動エネルギーを持っている。

初速を無視すると、A での力学的エネルギーを本来の $76\,\mathrm{J}$ ではなく $60\,\mathrm{J}$ と誤って求めてしまう。

答え： 始状態にすでに運動エネルギーがあるため、それを含めないと保存するエネルギーの合計を誤るからである。

2

(1) 系は小球と地球であり、仕事をする力は重力だけである。したがって力学的エネルギーは保存する。ばねはないため、$U_s = 0\,\mathrm{J}$ である。

A を高さの基準とし、最高点を P とする。

量	状態 A	最高点 P
高さ	$0\,\mathrm{m}$	求める値
速さ	$6.0\,\mathrm{m/s}$	$0\,\mathrm{m/s}$
K	$18\,\mathrm{J}$	$0\,\mathrm{J}$
U_g	$0\,\mathrm{J}$	求める値
U_s	$0\,\mathrm{J}$	$0\,\mathrm{J}$

A での力学的エネルギーは、

$$\begin{aligned} E_A &= \frac{1}{2}(1.0\,\mathrm{kg})(6.0\,\mathrm{m/s})^2 \\ &= 18\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

最高点では速さが $0\,\mathrm{m/s}$ になるため、運動エネルギーは $0\,\mathrm{J}$ となる。

したがって、

$$(1.0\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})h_P = 18\,\mathrm{J}$$

より、

$$h_P = 1.8\,\mathrm{m}$$

である。

答え： 力学的エネルギー $18\,\mathrm{J}$、最高点の高さ $1.8\,\mathrm{m}$。

(2) 高さ 1.0 m の状態を Q とする。Q での位置エネルギーは、

$$\begin{aligned} U_{g,Q} &= (1.0\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(1.0\,\mathrm{m}) \\ &= 10\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

したがって、

$$\begin{aligned} K_Q &= 18\,\mathrm{J} - 10\,\mathrm{J} \\ &= 8.0\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

$$\frac{1}{2}(1.0\,\mathrm{kg})v_Q^2 = 8.0\,\mathrm{J}$$

より、

$$v_Q^2 = 16\,\mathrm{m^2/s^2}$$

である。よって、

$$v_Q = 4.0\,\mathrm{m/s}$$

となる。

上昇中と下降中の高さが同じなら、位置エネルギーも運動エネルギーも同じになるため、速さは等しい。ただし、速度の向きは上昇中と下降中で反対である。

答え： 運動エネルギー 8.0 J、速さ 4.0 m/s。上昇中と下降中で速さは等しいが、向きは異なる。

(3) 高さ 2.0 m での位置エネルギーは、

$$\begin{aligned} U_g &= (1.0\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(2.0\,\mathrm{m}) \\ &= 20\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

保存則から形式的に運動エネルギーを求めると、

$$\begin{aligned} K &= 18\,\mathrm{J} - 20\,\mathrm{J} \\ &= -2.0\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

しかし運動エネルギーは負になれないため、この状態は実現できない。

答え： 高さ 2.0 m には到達できない。

(4) 新しい基準は、元の基準より 1.0 m 高い位置である。

そのため、新しい高さは元の高さから 1.0 m を引いた値になる。

A では、

$$\begin{aligned} h'_A &= 0\,\mathrm{m} - 1.0\,\mathrm{m} \\ &= -1.0\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

となる。

最高点 P では、

$$\begin{aligned} h'_P &= 1.8\,\mathrm{m} - 1.0\,\mathrm{m} \\ &= 0.80\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

となる。

A での運動エネルギーは変わらず 18 J だが、位置エネルギーは、

$$\begin{aligned} U'_{g,A} &= (1.0\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(-1.0\,\mathrm{m}) \\ &= -10\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

したがって、

$$\begin{aligned} E'_A &= 18\,\mathrm{J} - 10\,\mathrm{J} \\ &= 8.0\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

最高点でも、

$$\begin{aligned} E'_P &= 0\,\mathrm{J} \\ &\quad +(1.0\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(0.80\,\mathrm{m}) \\ &= 8.0\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となり、保存則が成り立つ。

答え： 新しい高さは A で $-1.0\,\mathrm{m}$、最高点で $0.80\,\mathrm{m}$。A の力学的エネルギーは 8.0 J。

基準を変えても、A から最高点までの高さの差 1.8 m は変わらない。

(5) 最高点でも小球には重力が働く。空気抵抗を無視するので、加速度は下向きであり、その大きさは $10\,\mathrm{m/s^2}$ である。

答え： 加速度は $0\,\mathrm{m/s^2}$ にならない。最高点で速度は一瞬 0 になるが、重力による下向きの加速度は続くからである。

3

この問題では、重力・ばね力以外の力がする仕事の合計を調べることが判断の中心となる。

(1) **使える**。

固定された滑らかな斜面では、物体の変位と垂直抗力が直交するため、垂直抗力の仕事は 0 J である。

重力による位置エネルギーを含めれば、力学的エネルギーは保存する。

(2) **使えない**。

動摩擦力が負の仕事をするため、力学的エネルギーは減少する。重力による位置エネルギーの減少分が、すべて運動エネルギーになるとは限らない。

(3) **使えない**。

空気抵抗が負の仕事をするため、力学的エネルギーの和は一定ではない。

(4) **使える**。

面から離れた後は垂直抗力がなくなり、重力だけが仕事をする。したがって、その空中運動について力学的エネルギーは保存する。

ただし、物体は元の面に沿って進むとは限らない。接触を前提とした運動経路をそのまま使ってはいけない。

(5) **使えない**。

重力・ばね力以外の仕事の合計が正であるため、力学的エネルギーは増加する。したがって、$E_A = E_B$ とはできない。

(6) **使える**。

重力による位置エネルギーと弾性エネルギーの両方を系の中で扱う。その他の力の仕事の合計は 0 J なので、三つのエネルギーの和は保存する。

(7) **与えられた条件だけでは判断できない**。

動く支持面の垂直抗力は物体に仕事をする場合がある。そのため、垂直抗力が仕事をしないと決めつけてはいけない。

垂直抗力を含む他の力の仕事の合計を確認する必要がある。

場面	保存則の判断	根拠
(1) 固定された滑らかな斜面	使える	垂直抗力の仕事が 0
(2) 粗い斜面	使えない	摩擦力が負の仕事
(3) 空気抵抗のある落下	使えない	抵抗が負の仕事
(4) 接触を失った後の自由運動	使える	その後は重力だけが仕事
(5) 外力が正の仕事	使えない	他の仕事の合計が正
(6) 重力とばね力の両方	使える	他の仕事の合計が 0
(7) 動く支持面	判断できない	垂直抗力の仕事が不明

ワンポイント： 保存則の条件は「物体に力が働かないこと」ではない。重力とばね力以外の力がする仕事の合計を確認することが必要である。

4

(1) 系は小球と地球であり、重力だけが仕事をするため力学的エネルギーは保存する。ばねはないので $U_s = 0\,\mathrm{J}$ である。

量	状態 A	状態 B	状態 C
高さ	$0\,\mathrm{m}$	$-0.30\,\mathrm{m}$	$+0.30\,\mathrm{m}$
速さ	$2.0\,\mathrm{m/s}$	求める値	到達可否を判定
K	$2.0\,\mathrm{J}$	求める値	計算して判定
U_g	$0\,\mathrm{J}$	$-3.0\,\mathrm{J}$	$+3.0\,\mathrm{J}$
U_s	$0\,\mathrm{J}$	$0\,\mathrm{J}$	$0\,\mathrm{J}$

A では高さが $0\,\mathrm{m}$ なので、重力による位置エネルギーは $0\,\mathrm{J}$ である。

$$\begin{aligned} E_A &= \frac{1}{2}(1.0\,\mathrm{kg})(2.0\,\mathrm{m/s})^2 \\ &= 2.0\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

答え： $2.0\,\mathrm{J}$。

(2) B での位置エネルギーは、

$$\begin{aligned} U_{g,B} &= (1.0\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(-0.30\,\mathrm{m}) \\ &= -3.0\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

保存則より、

$$\begin{aligned} K_B &= 2.0\,\mathrm{J} - (-3.0\,\mathrm{J}) \\ &= 5.0\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

$$\frac{1}{2}(1.0\,\mathrm{kg})v_B^2 = 5.0\,\mathrm{J}$$

より、

$$v_B^2 = 10\,\mathrm{m^2/s^2}$$

である。

したがって、

$$v_B = \sqrt{10}\,\mathrm{m/s}$$

となる。

答え： $U_{g,B} = -3.0\,\mathrm{J}$、$K_B = 5.0\,\mathrm{J}$、$v_B = \sqrt{10}\,\mathrm{m/s}$。

(3) C での位置エネルギーは、

$$U_{g,C} = (1.0\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(+0.30\,\mathrm{m})$$
$$= 3.0\,\mathrm{J}$$

である。

保存則から形式的に計算すると、

$$K_C = 2.0\,\mathrm{J} - 3.0\,\mathrm{J}$$
$$= -1.0\,\mathrm{J}$$

となる。

しかし、運動エネルギーは負になれないため、この状態は実現できない。

答え： C には到達できない。

(4) 重力による位置エネルギーは、選んだ基準より低い位置で負になることがある。これは基準の取り方によって定まる値であり、物理的に問題はない。

一方、運動エネルギーは速さの二乗に比例するため負にはならない。したがって、負の運動エネルギーが必要になる状態は実現できない。

答え： 負の位置エネルギーは基準との位置関係を表すが、負の運動エネルギーは実現不能を示す。

5

系は物体・地球・ばねである。水平面を高さの基準とし、重力と垂直抗力は仕事をしない。ばね力以外の仕事は 0 J なので、力学的エネルギーは保存する。

初期状態 A と自然長の状態 B を整理する。

量	状態 A	状態 B
速さ	$0\,\mathrm{m/s}$	求める値
ばねの変位	$-0.20\,\mathrm{m}$	$0\,\mathrm{m}$
K	$0\,\mathrm{J}$	求める値
U_g	$0\,\mathrm{J}$	$0\,\mathrm{J}$
U_s	$2.0\,\mathrm{J}$	$0\,\mathrm{J}$

(1) 初めは静止しているので、力学的エネルギーは弾性エネルギーに等しい。

$$E_A = \frac{1}{2}(100\,\mathrm{N/m})(-0.20\,\mathrm{m})^2$$
$$= 2.0\,\mathrm{J}$$

答え： 2.0 J。

(2) 自然長では弾性エネルギーが 0 J なので、

$$K_B = 2.0\,\mathrm{J}$$

である。

$$\frac{1}{2}(2.0\,\mathrm{kg})v_B^2 = 2.0\,\mathrm{J}$$

より、

$$v_B^2 = 2.0\,\mathrm{m^2/s^2}$$

したがって、

$$v_B = \sqrt{2}\,\mathrm{m/s}$$

である。

答え： $\sqrt{2}\,\mathrm{m/s}$。

(3) $x = +0.10\,\mathrm{m}$ の位置を P とする。

$$\begin{aligned} U_{s,P} &= \frac{1}{2}(100\,\mathrm{N/m})(+0.10\,\mathrm{m})^2 \\ &= 0.50\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

力学的エネルギーは 2.0 J なので、

$$\begin{aligned} K_P &= 2.0\,\mathrm{J} - 0.50\,\mathrm{J} \\ &= 1.50\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

$$\frac{1}{2}(2.0\,\mathrm{kg})v_P^2 = 1.50\,\mathrm{J}$$

より、

$$v_P^2 = 1.50\,\mathrm{m^2/s^2}$$

となる。

したがって、

$$v_P = \sqrt{1.50}\,\mathrm{m/s}$$

である。

答え： 弾性エネルギー 0.50 J、運動エネルギー 1.50 J、速さ $\sqrt{1.50}\,\mathrm{m/s}$。

(4) 最大の伸びの位置では速さが $0\,\mathrm{m/s}$ になるため、力学的エネルギーはすべて弾性エネルギーとなる。

$$\frac{1}{2}(100\,\mathrm{N/m})x^2 = 2.0\,\mathrm{J}$$

より、

$$x^2 = 0.040\,\mathrm{m}^2$$

である。

最大の伸びを問われているので、

$$x = +0.20\,\mathrm{m}$$

となる。

ばねが物体に及ぼす力は、

$$\begin{aligned} F_s &= -kx \\ &= -(100\,\mathrm{N/m})(+0.20\,\mathrm{m}) \\ &= -20\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

である。

水平面上で他の水平方向の力はないため、

$$\begin{aligned} a &= \frac{-20\,\mathrm{N}}{2.0\,\mathrm{kg}} \\ &= -10\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

となる。

答え： 最大の伸び $0.20\,\mathrm{m}$、ばねの力 $-20\,\mathrm{N}$、加速度 $-10\,\mathrm{m/s^2}$。

最大の伸びの位置で速度は 0 になるが、ばねの力と加速度は 0 ではない。

6

系は小物体・地球・ばねである。

固定された滑らかな経路上で垂直抗力は仕事をせず、空気抵抗・摩擦・衝突による損失もない。重力・ばね力以外の仕事の合計は $0\,\mathrm{J}$ なので、A から C まで力学的エネルギーは保存する。

A では物体は静止し、ばねは自然長にある。B では高さが $0\,\mathrm{m}$ で、ばねはまだ圧縮されていない。C ではばねが最大まで縮み、物体の速さが $0\,\mathrm{m/s}$ になる。

量	状態 A	状態 B	状態 C
高さ	$0.40\,\mathrm{m}$	$0\,\mathrm{m}$	$0\,\mathrm{m}$
速さ	$0\,\mathrm{m/s}$	求める値	$0\,\mathrm{m/s}$
ばねの変位	未接触・自然長	$0\,\mathrm{m}$	求める負の値
K	$0\,\mathrm{J}$	求める値	$0\,\mathrm{J}$
U_g	$6.0\,\mathrm{J}$	$0\,\mathrm{J}$	$0\,\mathrm{J}$
U_s	$0\,\mathrm{J}$	$0\,\mathrm{J}$	求める値

(1) A では運動エネルギーが 0 J で、ばねも自然長のままである。
したがって、

$$\begin{aligned} E_A &= (1.5\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(0.40\,\mathrm{m}) \\ &= 6.0\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。
答え： 6.0 J。

(2) B では位置エネルギーと弾性エネルギーがともに 0 J となる。
そのため、

$$K_B = 6.0\,\mathrm{J}$$

である。

$$\frac{1}{2}(1.5\,\mathrm{kg})v_B^2 = 6.0\,\mathrm{J}$$

より、

$$v_B^2 = 8.0\,\mathrm{m^2/s^2}$$

したがって、

$$v_B = 2\sqrt{2}\,\mathrm{m/s}$$

となる。
答え： $2\sqrt{2}\,\mathrm{m/s}$。

(3) 最大圧縮位置 C では速さが 0 m/s であり、高さも 0 m である。
したがって、

$$U_{s,C} = 6.0\,\mathrm{J}$$

となる。

$$\frac{1}{2}(300\,\mathrm{N/m})x_C^2 = 6.0\,\mathrm{J}$$

より、

$$x_C^2 = 0.040\,\mathrm{m^2}$$

である。
圧縮を負の変位としているので、

$$x_C = -0.20\,\mathrm{m}$$

となる。
答え： 最大圧縮量 0.20 m。

(4) 各状態のエネルギーは次のようになる。

状態	K	U_g	U_s	E
A	0 J	6.0 J	0 J	6.0 J
B	6.0 J	0 J	0 J	6.0 J
C	0 J	0 J	6.0 J	6.0 J

A では重力による位置エネルギー、B では運動エネルギー、C では弾性エネルギーが、それぞれ主なエネルギーとなっている。

答え： A・B・C のすべてで力学的エネルギーは 6.0 J となり、保存される。

なお、B と C はいずれも水平面上にある。最大圧縮量を重力による位置エネルギーの高さに代入してはいけない。

7

正解：B

A は誤り。

物体に力が働いていても、その力が仕事をするとは限らない。

例えば、固定された滑らかな斜面での垂直抗力は物体に働いているが、仕事は 0 J である。重力を位置エネルギーに含めれば、力学的エネルギーは保存する。

B は正しい。

速さが一定でも、高さが変わると重力による位置エネルギーが変化することがある。

例えば、物体を一定の速さで上昇させるために外部から力が正の仕事をする場合、運動エネルギーは一定でも位置エネルギーが増加するため、力学的エネルギーは増加する。

したがって、速さが一定であることだけでは力学的エネルギーの保存を判断できない。

C は誤り。

重力による位置エネルギーは、基準より低い位置では負の値を取ることがある。

基準高さをどこに取るかは選ぶことができるが、比較するすべての状態で同じ基準を使わなければならない。

D は誤り。

力学的エネルギーが等しいことから、同じ高さ・同じ質量などの条件の下で速さを比較できる場合はある。

しかし、経路の長さや途中の速さの変化は異なり得る。したがって、所要時間まで等しいとはいえない。

答え：B。

力学的エネルギーの保存を判断するときに確認すべきことは、速さが一定かどうかでも、物体に力が働いているかどうかでもない。

同じ系・同じ基準で状態を比較し、重力・ばね力以外の力がする仕事の合計が 0 J であるかを確かめることが、保存則を使うための判断の中心である。