第 221 講 ベクトルの加法・減法

学習目標

- 2 つのベクトルの和を、三角形の法則を使って作図できる。
- 共通の始点から出る 2 つのベクトルの和を、平行四辺形の対角線として表せる。
- 逆ベクトルを用いて減法を加法に直し、2 つのベクトルの差を正しい向きで表せる。
- ベクトルの加法に関する基本性質を式と図で説明できる。

1. ベクトルの加法

2 つの移動を 1 本の矢印にまとめる

点 A から点 B へ移動し、続けて点 B から点 C へ移動したとする。この 2 つの移動全体の結果は、点 A から点 C への 1 回の移動と同じである。
ベクトルでも同じように、1 本目の終点に 2 本目の始点を合わせる。出発点から最後の到着点へ向かうベクトルを、2 つのベクトルの**和**という。

三角形の法則

点 A、B、C について、$\overrightarrow{AB}$ の終点 B と $\overrightarrow{BC}$ の始点 B がつながっている。このとき、次の関係が成り立つ。

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

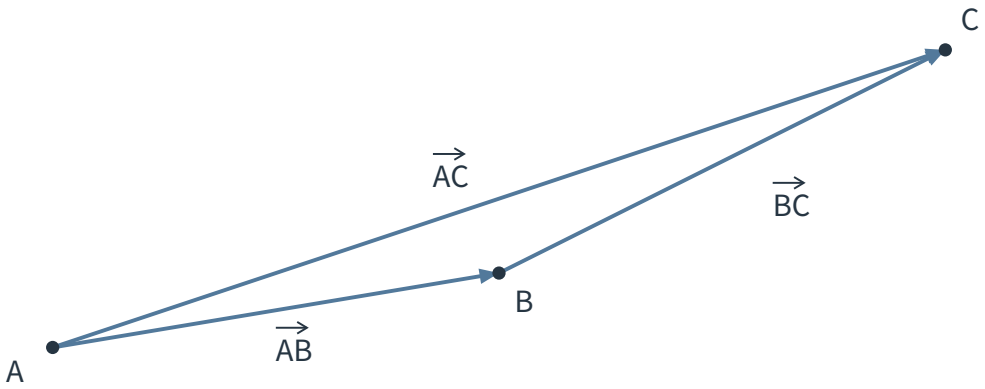


図 1　三角形の法則 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

和を作るときの要点は、矢印を置く場所ではなく、つなぐ順序である。2 本目の矢印は、向きと大きさを変えずに平行移動して、その始点を 1 本目の終点へ合わせる。

途中の点は消去できる

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ では、1 本目の終点と 2 本目の始点がともに B である。途中の点 B を通る一続きの移動なので、出発点 A から到着点 C への $\overrightarrow{AC}$ にまとめられる。
一方、$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$ は B でつながらない。文字が 1 つ共通しているだけで機械的に消去してはならない。

2. 平行四辺形の法則

始点が同じ 2 本の和

2 つのベクトルが共通の点 O から出ているときは、一方を平行移動して他方の終点へつなげればよい。その作図をまとめたものが平行四辺形の法則である。

平行四辺形の法則

$OACB$ が平行四辺形で、$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ が隣り合う 2 辺を表すとする。このとき、共通の始点 O から向かい側の頂点 C へ引いた対角線が和を表す。

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$$

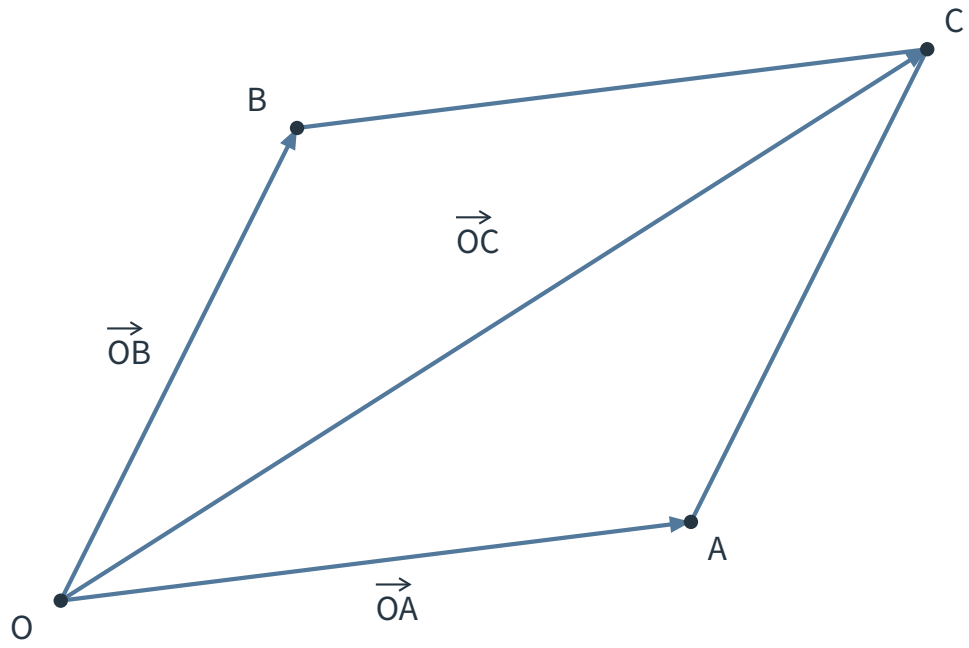


図 2　平行四辺形の対角線が 2 つのベクトルの和を表す

平行四辺形では $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$ であるから、三角形の法則より $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$ となる。したがって、$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ である。

©ミライコーチング

加える順序を変えても和は同じ

平行四辺形のもう一方の道筋を通れば、$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$ である。また、$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}$ なので、$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$ となる。このことから、ベクトル $\vec{a}$、$\vec{b}$ について交換法則 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ が成り立つ。

3. 逆ベクトルと減法

逆ベクトル

零ベクトルでないベクトル $\vec{a}$ と大きさが等しく、向きが反対のベクトルを、$\vec{a}$ の**逆ベクトル**といい、$-\vec{a}$ と書く。零ベクトルについては、$-\vec{0}=\vec{0}$ と定める。
例えば、A と B が異なるとき、$\overrightarrow{AB}$ の逆ベクトルは $\overrightarrow{BA}$ であり、$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$ である。

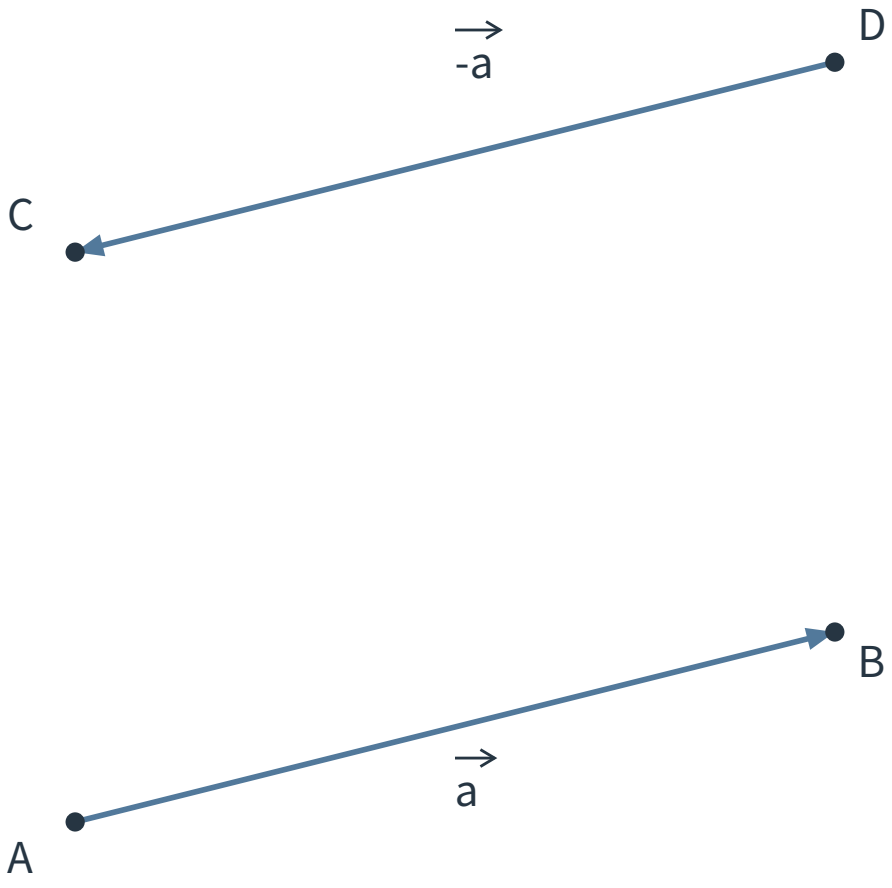


図 3　大きさが等しく向きが反対のベクトル

ベクトルの減法

ベクトル $\vec{a}$ からベクトル $\vec{b}$ を引くことを、$\vec{b}$ の逆ベクトルを加えることとして定める。

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$$

減法では、引くベクトルだけ向きを反対にしてから、加法の三角形の法則を用いる。

共通始点の 2 本の差

点 O を共通の始点とする $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を考える。点 O から B へ進み、続いて B から A へ進むと、全体では O から A への移動になる。したがって、$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$ である。
この式から、$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$ となる。

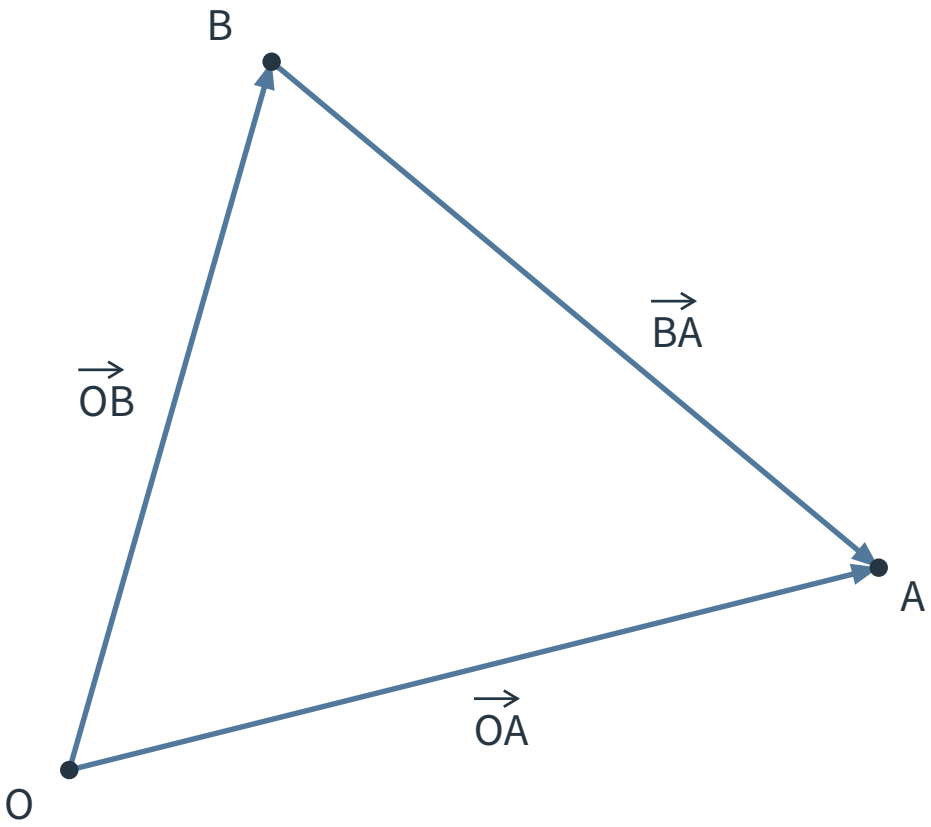


図 4　共通始点の 2 つのベクトルの差 $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$

差の向きは、引く方の終点 B から、引かれる方の終点 A へ向かう。$\overrightarrow{AB}$ と逆にしないことが重要である。

4. 加法の基本性質

計算を支える 4 つの性質

ベクトル $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ について、次の性質が成り立つ。

- 交換法則：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
- 結合法則：$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$
- 零ベクトル：$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$
- 逆ベクトル：$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

結合法則は、3 本の矢印を終点から始点へ順につないだとき、どの 2 本を先にまとめても、最初の始点から最後の終点までの矢印が変わらないことを表している。

差では順序を変えられない

加法には交換法則があるが、減法では一般に $\vec{a}-\vec{b}$ と $\vec{b}-\vec{a}$ は等しくない。実際、$\vec{b}-\vec{a}=-\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$ であり、互いに逆ベクトルである。

5. 例題

例題 1：折れ線に沿うベクトルの和

4 点 A、B、C、D について、$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$ を 1 本のベクトルで表せ。

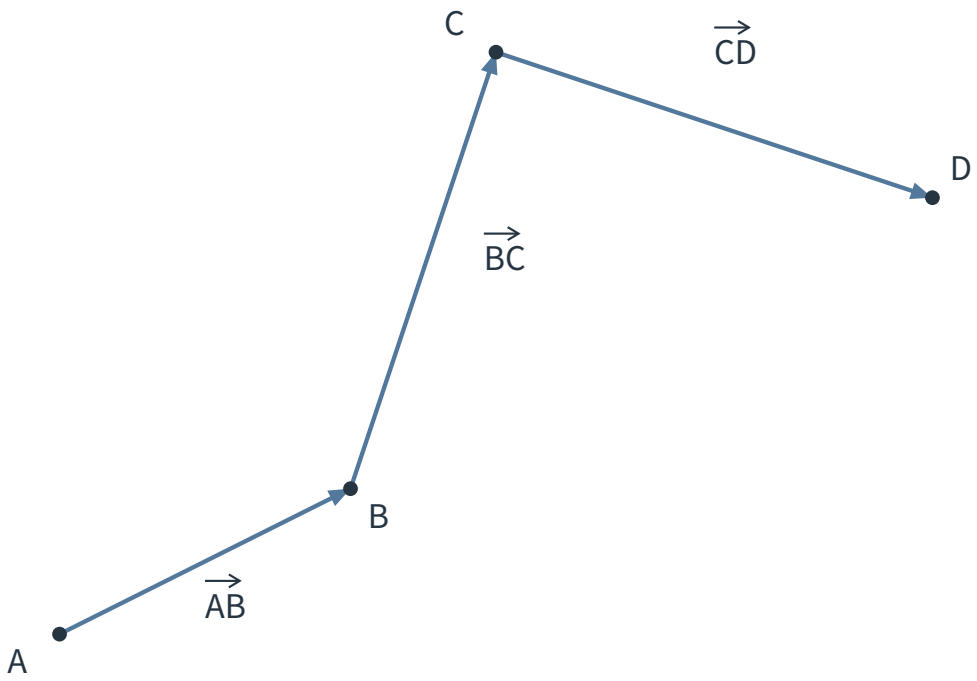


図 5　点 A から点 D までの 3 本のベクトル

例題 1 の解答・解説

矢印が A から B、B から C、C から D の順につながっている。三角形の法則を順に用いると、次のようになる。

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$$
$$=\overrightarrow{AD}$$

したがって、求めるベクトルは $\overrightarrow{AD}$ である。途中の点を消去できるのは、各矢印の終点と次の矢印の始点が一致しているからである。

例題 2：平行四辺形の対角線

$OACB$ が平行四辺形であるとき、$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ を 1 本のベクトルで表せ。

例題 2 の解答・解説

平行四辺形では、$\overrightarrow{OB}$ を向きと大きさを変えずに平行移動すると $\overrightarrow{AC}$ に重なる。よって、三角形の法則から $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$ である。
$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$ なので、$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ である。共通始点から出る 2 本の和は、平行四辺形の共通始点から引いた対角線になる。

例題 3：共通始点の 2 本の差

点 O を共通の始点とする 2 つのベクトル $\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{OQ}$ がある。$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}$ を、点 P、Q を用いた 1 本のベクトルで表せ。

例題 3 の解答・解説

O から Q へ進み、続いて Q から P へ進むと、全体では O から P へ進むことになる。したがって、$\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{OP}$ である。
よって、$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{QP}$ である。差は、引く方の終点 Q から引かれる方の終点 P へ向かう。

6. 演習問題

演習 1：三角形の法則

点 X、Y、Z について、$\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{YZ}$ を 1 本のベクトルで表せ。また、その理由を説明せよ。

演習 2：途中の点をまとめる

5 点 A、B、C、D、E について、$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}$ を 1 本のベクトルで表せ。

演習 3：加える順序

点 A、B、C について、$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$ を 1 本のベクトルで表せ。

©ミライコーチング

演習 4：逆ベクトル

次の式を簡単にせよ。
(1) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NM}$
(2) $-\overrightarrow{PQ}$

演習 5：共通始点の差

点 S を共通の始点とする $\overrightarrow{SA}$、$\overrightarrow{SB}$ について、次を 1 本のベクトルで表せ。
(1) $\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}$
(2) $\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA}$

演習 6：平行四辺形と加法

$OACB$ が平行四辺形である。次の式を 1 本のベクトルで表し、用いた性質を説明せよ。
(1) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$
(2) $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}$

7. 演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

$\overrightarrow{XY}$ の終点と $\overrightarrow{YZ}$ の始点がともに Y なので、2 本の矢印は順につながる。三角形の法則より、$\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{YZ}=\overrightarrow{XZ}$ である。

演習 2 の解答・解説

矢印は A から B、B から C、C から D、D から E の順につながっている。結合法則と三角形の法則を用いると、次のようになる。

$$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}\right)=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}$$
$$=\overrightarrow{AE}$$

したがって、求めるベクトルは $\overrightarrow{AE}$ である。

演習 3 の解答・解説

与えられた順では矢印がつながらないため、交換法則を用いて順序を入れ替える。

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}$$
$$=\overrightarrow{CB}$$

C から A、続いて A から B へ進むので、求めるベクトルは $\overrightarrow{CB}$ である。

演習 4 の解答・解説

(1) $\overrightarrow{NM}$ は $\overrightarrow{MN}$ の逆ベクトルである。したがって、$\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NM}=\vec{0}$ である。
(2) $\overrightarrow{PQ}$ と大きさが等しく向きが反対のベクトルは $\overrightarrow{QP}$ である。したがって、$-\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QP}$ である。

演習 5 の解答・解説

(1) $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{SA}$ であるから、$\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{BA}$ である。
(2) $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{SB}$ であるから、$\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{AB}$ である。
2 つの答え $\overrightarrow{BA}$ と $\overrightarrow{AB}$ は互いに逆ベクトルである。減法では順序を入れ替えると向きが反対になる。

演習 6 の解答・解説

(1) 平行四辺形の法則より、$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ である。
(2) 加法の交換法則より、$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ である。したがって、$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$ である。
どちらも共通始点 O から向かい側の頂点 C へ向かう対角線を表す。

©ミライコーチング