

第 36 講 二次不等式とグラフ

学習目標

- ・ 二次式 $f(x)$ の正負を、放物線 $y = f(x)$ と x 軸の位置関係から判断できる。
- ・ $f(x) > 0$ 、 $f(x) < 0$ をグラフを使って解ける。
- ・ $f(x) \geq 0$ 、 $f(x) \leq 0$ で、端点を含めるかどうかを正しく判断できる。
- ・ x 軸との共有点が 2 個・1 個・0 個の場合について、基本的な二次不等式を解ける。

二次不等式はグラフの高さとして考える

$f(x) > 0$ はグラフが x 軸より上

二次関数 $y = f(x)$ を考えます。

ある x に対して $f(x) > 0$ なら、そのときの y 座標は正です。

つまり、グラフは x 軸より上にあります。

反対に、 $f(x) < 0$ なら、グラフは x 軸より下にあります。

したがって、二次不等式は、放物線のどの部分が x 軸より上または下にあるかを調べる問題として考えられます。

式の符号とグラフの位置

二次関数 $y = f(x)$ について、

- ・ $f(x) > 0$: グラフが x 軸より上
- ・ $f(x) < 0$: グラフが x 軸より下
- ・ $f(x) = 0$: グラフが x 軸上

です。

$\geq$ や $\leq$ のときは、 x 軸上の点も含みます。

まず x 軸との共有点を求める

符号が切り替わる位置を調べる

二次不等式

$$x^2 - 4x + 3 < 0$$

を考えます。

まず、対応する方程式

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

を解きます。

$(x-1)(x-3) = 0$ なので、 $x = 1, 3$ です。

したがって、放物線 $y = x^2 - 4x + 3$ は x 軸と $(1, 0)$ 、 $(3, 0)$ で交わります。

この 2 点を境にして、グラフが x 軸より上か下かを読み取ります。

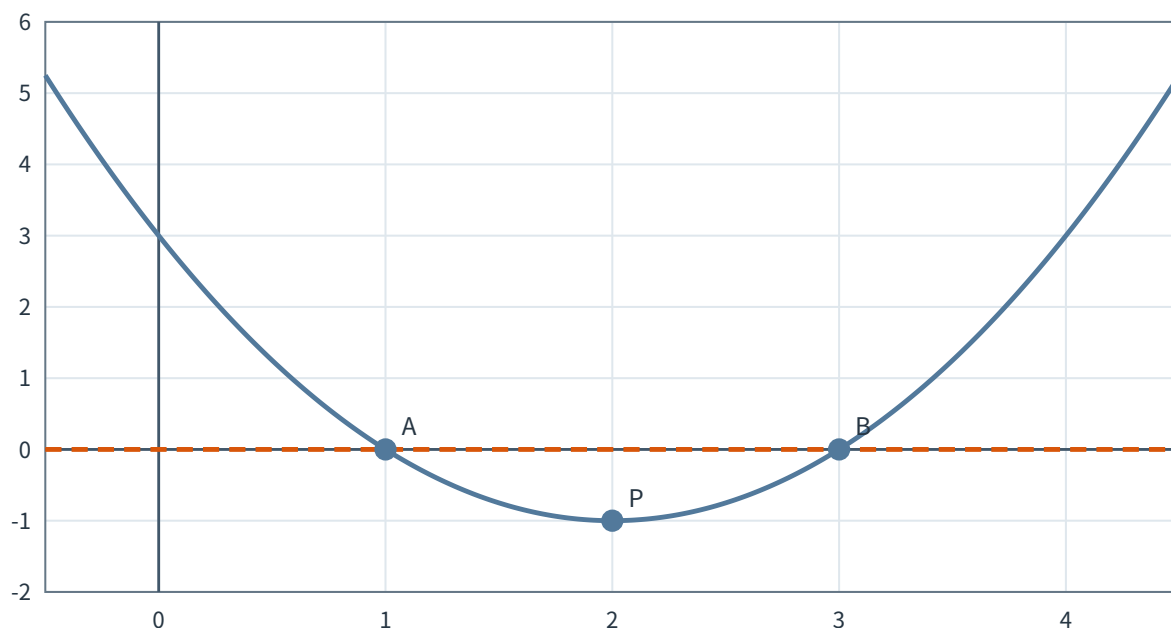


図1 $y = x^2 - 4x + 3$ と x 軸の位置関係

2つの解の間で負になる

この放物線は上に開いています。

$x < 1$ ではグラフは x 軸より上、 $1 < x < 3$ では下、 $x > 3$ では再び上にあります。
したがって、

$$x^2 - 4x + 3 < 0$$

の解は、

$$1 < x < 3$$

です。

上に開き、 x 軸と2点で交わる場合

$a > 0$ で、方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の異なる2つの実数解を α, β とし、 $\alpha < \beta$ とします。

このとき、

- $ax^2 + bx + c > 0$ は $x < \alpha$ または $x > \beta$
- $ax^2 + bx + c < 0$ は $\alpha < x < \beta$

となります。

等号があると共有点を含む

>と≥の違い

次の不等式を比べます。

$$x^2 - 4x + 3 > 0$$

では、 $x = 1, 3$ のとき左辺は0なので、解には含みません。

したがって、

$$x < 1 \quad \text{または} \quad x > 3$$

です。

一方、

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0$$

では、左辺が 0 になる場合も含みます。
したがって、

$$x \leq 1 \text{ または } x \geq 3$$

です。

端点を含むか必ず確認する

不等号が $>$ または $<$ なら、方程式の解となる端点を含みません。
不等号が $\geq$ または $\leq$ なら、端点を含みます。
最後に不等号を見直す習慣をつけましょう。

下に開く放物線では正負が逆になる

係数 a の符号を見る

二次不等式

$$-x^2 + 4x - 3 > 0$$

を考えます。

方程式 $-x^2 + 4x - 3 = 0$ の解は $x = 1, 3$ です。

この放物線は x^2 の係数が負なので、下に開きます。

したがって、2つの共有点の間ではグラフが x 軸より上にあります。

よって、

$$1 < x < 3$$

が解です。

下に開き、 x 軸と 2 点で交わる場合

$a < 0$ で、方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の異なる 2 つの実数解を α, β とし、 $\alpha < \beta$ とします。

このとき、

- $ax^2 + bx + c > 0$ は $\alpha < x < \beta$
- $ax^2 + bx + c < 0$ は $x < \alpha$ または $x > \beta$

となります。

上に開く場合と正負の位置が逆です。

x 軸に接する場合

重解では符号が変わらない

二次式

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

を考えます。

$(x - 1)^2$ は、どんな実数 x に対しても 0 以上です。

$x = 1$ のときだけ 0 になり、それ以外では正です。

したがって、

$$x^2 - 2x + 1 > 0$$

の解は $x \neq 1$ 、つまり

$$x < 1 \text{ または } x > 1$$

です。

また、

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

は、すべての実数で成り立ちます。

上に開き、x 軸に接する場合

上に開く放物線が $x = r$ で x 軸に接するとき、

- $f(x) > 0$ は $x < r$ または $x > r$
- $f(x) \geq 0$ はすべての実数
- $f(x) < 0$ を満たす実数はない
- $f(x) \leq 0$ は $x = r$

です。

x 軸と共有点をもたない場合

グラフ全体が x 軸の片側にある

二次式

$$x^2 + 1$$

は、どんな実数 x に対しても正です。

対応する放物線 $y = x^2 + 1$ は上に開き、 x 軸と共有点を持ちません。

したがって、

$$x^2 + 1 > 0$$

はすべての実数で成り立ちます。

反対に、

$$x^2 + 1 < 0$$

を満たす実数はありません。

実数解がない場合

放物線が x 軸と交わらない場合は、グラフ全体が x 軸より上か下かを確認します。

上に開いていて x 軸より上にあるなら、二次式は常に正です。

下に開いていて x 軸より下にあるなら、二次式は常に負です。

二次不等式を解く基本手順

グラフで解く手順

二次不等式を解くときは、次の順に考えます。

1. 対応する二次方程式 $f(x) = 0$ を解く。
2. 放物線が上に開くか下を開くか確認する。
3. x 軸より上と下になる範囲を判断する。
4. 問題の不等号に合う範囲を選ぶ。
5. $\geq$ や $\leq$ なら端点を含める。

因数だけを見て機械的に決めない

方程式の解だけ分かって、どの範囲で正または負になるかは決まりません。

放物線が上に開くか下を開くかを必ず確認します。

二次不等式は、グラフと x 軸の位置関係として考えると符号を判断しやすくなります。

例題

例題 1

次の二次不等式を解きなさい。

$$x^2 - 5x + 6 < 0$$

例題 1 の解答・解説

まず、

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

を解きます。

$(x-2)(x-3) = 0$ より、 $x = 2, 3$ です。

放物線は上に開くので、 x 軸より下になるのは 2 つの解の間です。

したがって、

$$2 < x < 3$$

です。

例題 2

次の二次不等式を解きなさい。

$$-x^2 + 5x - 4 \geq 0$$

例題 2 の解答・解説

方程式 $-x^2 + 5x - 4 = 0$ を解くと、 $x = 1, 4$ です。
放物線は下に開くので、 x 軸以上になるのは 2 つの解の間です。
等号を含むので端点も含めます。
したがって、

$$1 \leq x \leq 4$$

です。

例題 3

次の二次不等式を解きなさい。

$$x^2 + 4x + 4 > 0$$

例題 3 の解答・解説

左辺を因数分解すると、

$$(x + 2)^2 > 0$$

です。
 $x = -2$ のときだけ左辺は 0 になり、それ以外では正です。
したがって、

$$x < -2 \quad \text{または} \quad x > -2$$

です。

例題 4

次の二次不等式を解きなさい。

$$x^2 + 2x + 5 \leq 0$$

例題 4 の解答・解説

方程式 $x^2 + 2x + 5 = 0$ の判別式は、

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16$$

です。
実数解はなく、放物線は上に開きます。
したがって、グラフ全体が x 軸より上にあり、 $x^2 + 2x + 5 \leq 0$ を満たす実数はありません。

演習問題

練習問題 1

次の二次不等式を解きなさい。

$$x^2 - 7x + 10 > 0$$

練習問題 2

次の二次不等式を解きなさい。

$$x^2 - x - 6 \leq 0$$

練習問題 3

次の二次不等式を解きなさい。

$$-x^2 + 3x + 4 < 0$$

練習問題 4

次の二次不等式を解きなさい。

$$-x^2 + 6x - 8 \geq 0$$

練習問題 5

次の二次不等式を解きなさい。

$$x^2 - 6x + 9 \leq 0$$

練習問題 6

次の二次不等式を解きなさい。

$$x^2 + 6x + 9 > 0$$

練習問題 7

次の二次不等式を解きなさい。

$$x^2 - 2x + 5 > 0$$

練習問題 8

次の二次不等式を解きなさい。

$$-x^2 + 2x - 5 \geq 0$$

練習問題 9

ある生徒は、

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0$$

について、方程式 $x^2 - 4x + 3 = 0$ の解が $x = 1, 3$ であることから、

$$1 \leq x \leq 3$$

と答えました。

この答えの誤りを説明し、正しい解を求めなさい。

演習問題の解答・解説**練習問題 1 の解答・解説**

方程式 $x^2 - 7x + 10 = 0$ を解くと、 $x = 2, 5$ です。

放物線は上に開くので、 x 軸より上になるのは 2 つの解の外側です。

したがって、

$$x < 2 \quad \text{または} \quad x > 5$$

です。

練習問題 2 の解答・解説

方程式 $x^2 - x - 6 = 0$ を解くと、 $x = -2, 3$ です。

放物線は上に開くので、 x 軸以下になるのは 2 つの解の間です。

等号を含むので、

$$-2 \leq x \leq 3$$

です。

練習問題 3 の解答・解説

方程式 $-x^2 + 3x + 4 = 0$ を解くと、 $x = -1, 4$ です。

放物線は下に開くので、 x 軸より下になるのは 2 つの解の外側です。

したがって、

$$x < -1 \quad \text{または} \quad x > 4$$

です。

練習問題 4 の解答・解説

方程式 $-x^2 + 6x - 8 = 0$ を解くと、 $x = 2, 4$ です。

放物線は下に開くので、 x 軸以上になるのは 2 つの解の間です。

したがって、

$$2 \leq x \leq 4$$

です。

練習問題 5 の解答・解説

左辺は、

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

です。

2 乗は常に 0 以上なので、 ≤ 0 となるのは 0 になる場合だけです。

したがって、

$$x = 3$$

です。

練習問題 6 の解答・解説

左辺は、

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

です。

$x = -3$ のときだけ 0 になり、それ以外では正です。

したがって、

$$x < -3 \text{ または } x > -3$$

です。

練習問題 7 の解答・解説

方程式 $x^2 - 2x + 5 = 0$ の判別式は、

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16$$

です。

実数解はなく、放物線は上に開くので、グラフ全体が x 軸より上にあります。

したがって、解はすべての実数です。

練習問題 8 の解答・解説

方程式 $-x^2 + 2x - 5 = 0$ の判別式は、

$$D = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5) = -16$$

です。

実数解はなく、放物線は下に開きます。

グラフ全体が x 軸より下にあるので、 $-x^2 + 2x - 5 \geq 0$ を満たす実数はありません。

練習問題 9 の解答・解説

方程式の解 1, 3 は、放物線と x 軸の共有点の x 座標です。

この放物線は上に開くので、 x 軸以上になるのは 2 つの解の外側です。

また、 ≥ 0 なので $x = 1, 3$ も含みます。

したがって、

$$x \leq 1 \text{ または } x \geq 3$$

です。