第 223 講 ベクトルの成分表示

学習目標

- ベクトルの 2 つの成分が、横と縦の変化量を表すことを説明できる。
- 2 点の座標から、始点と終点を意識してベクトルの成分を求められる。
- 成分表示されたベクトルの加法・減法・実数倍を計算できる。
- ベクトルの相等を成分の等式に直し、未知数を求められる。

1. ベクトルを 2 つの数で表す

横の変化と縦の変化

座標平面上のベクトルは、矢印を平行移動して始点を原点に置くと、終点の座標によって表せる。
横に a_1、縦に a_2 だけ進むベクトルを (a_1, a_2) と表し、a_1 を第 1 成分、a_2 を第 2 成分という。
例えば、横に 3、縦に 2 だけ進むベクトルは $(3, 2)$ である。成分の順序は「横、縦」である。

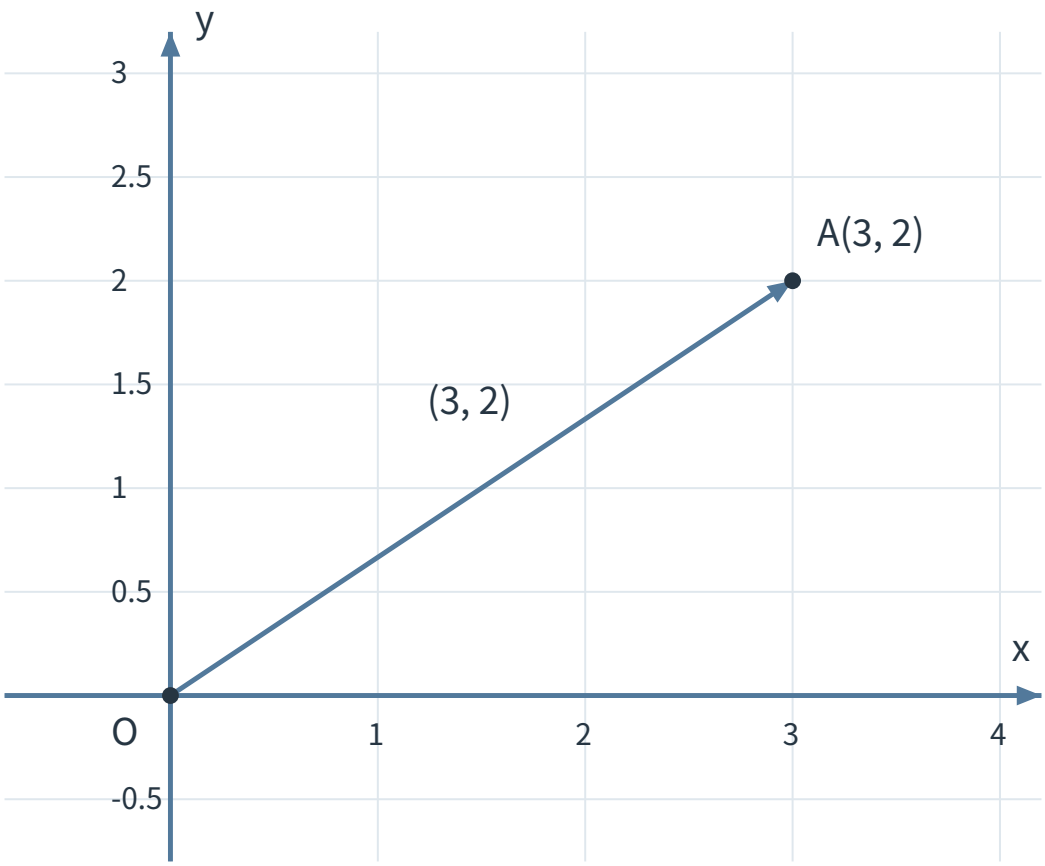

図 1　ベクトル $(3, 2)$ は横に 3、縦に 2 の変化を表す

ベクトルの成分表示

ベクトル $\vec{a}$ の第 1 成分が a_1、第 2 成分が a_2 であるとき、次のように書く。

$$\vec{a} = (a_1, a_2)$$

成分は矢印の置かれた位置ではなく、始点から終点までの横と縦の変化量を表す。そのため、同じベクトルを表す平行移動した矢印も、同じ成分表示をもつ。

座標と成分を区別する

点 $P(3, 2)$ の $(3, 2)$ は点の位置を表す。一方、ベクトル $\vec{a} = (3, 2)$ の $(3, 2)$ は横と縦の変化量を表す。数の並びが同じでも意味を区別する必要がある。

2. 2 点からベクトルの成分を求める

終点の座標から始点の座標を引く

点 $A(x_1, y_1)$ を始点、点 $B(x_2, y_2)$ を終点とするベクトルの成分は、次のようになる。

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$$

第 1 成分も第 2 成分も、必ず「終点−始点」の順に引く。

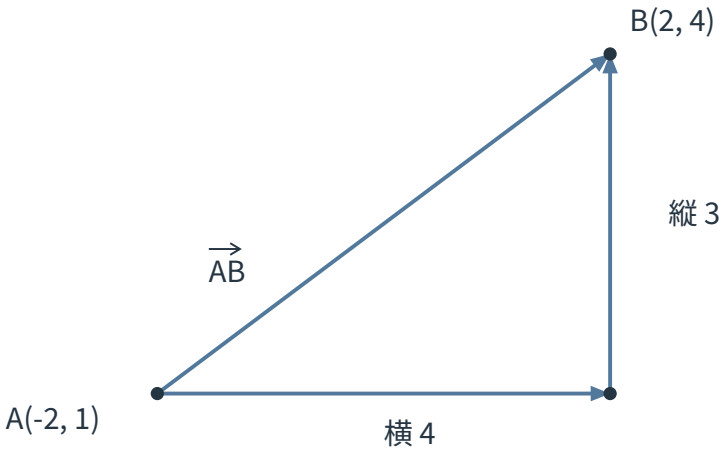

図 2　$A(-2, 1)$ から $B(2, 4)$ への変化は横に 4、縦に 3

この図では、横の変化は $2 - (-2) = 4$、縦の変化は $4 - 1 = 3$ である。したがって、$\overrightarrow{AB} = (4, 3)$ である。

向きを逆にすると両成分の符号が変わる

$\overrightarrow{BA}$ では始点と終点が入れ替わるので、$\overrightarrow{BA}=(-4,-3)$ である。一般に、$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$ である。

3. ベクトルの相等と成分比較

対応する成分がそれぞれ等しい

$\vec{a}=(a_1,a_2)$、$\vec{b}=(b_1,b_2)$ のとき、2 つのベクトルが等しいことと、対応する成分がそれぞれ等しいことは同値である。
すなわち、$\vec{a}=\vec{b}$ であるための必要十分条件は、$a_1=b_1$ かつ $a_2=b_2$ である。
この性質を用いて、ベクトルの等式を 2 つの数の等式に直すことを成分比較という。

零ベクトルと逆ベクトルの成分

横にも縦にも変化しない零ベクトルは $\vec{0}=(0,0)$ である。また、$\vec{a}=(a_1,a_2)$ の逆ベクトルは、両方の成分の符号を変えて $-\vec{a}=(-a_1,-a_2)$ となる。

4. 成分による計算

対応する成分ごとに計算する

$\vec{a}=(a_1,a_2)$、$\vec{b}=(b_1,b_2)$、実数 k に対して、加法・減法・実数倍は次のように計算する。
加法は $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$ である。
減法は $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$ である。
実数倍は $k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2)$ である。
第 1 成分どうし、第 2 成分どうしを対応させることが重要である。

片方の成分だけを計算しない

実数倍では両方の成分に同じ実数を掛ける。例えば、$-2(3,-1)=(-6,2)$ であり、第 2 成分にも -2 を掛ける。

5. 例題

例題 1：2 点から成分を求める

点 $P(-3,2)$、$Q(1,-4)$ に対して、$\overrightarrow{PQ}$ を成分表示せよ。

例題 1 の解答・解説

終点 Q の座標から始点 P の座標を引く。したがって、

$$\overrightarrow{PQ}=(1-(-3),\ -4-2)=(4,-6)$$

である。

例題 2：成分を用いた計算

$\vec{a}=(2,-3)$、$\vec{b}=(-1,4)$ のとき、$2\vec{a}-3\vec{b}$ を成分表示せよ。

例題 2 の解答・解説

実数倍をしてから、対応する成分ごとに引く。

$$\begin{aligned}2\vec{a}-3\vec{b}&=2(2,-3)-3(-1,4)\\&=(4,-6)-(-3,12)\\&=(7,-18)\end{aligned}$$

例題 3：成分比較

$(2x-1,\ y+3)=(5,-2)$ のとき、x、y を求めよ。

例題 3 の解答・解説

対応する成分を比較すると、$2x-1=5$、$y+3=-2$ である。よって、$2x=6$ から $x=3$、$y=-5$ である。

6. 演習問題

演習 1：成分の意味

ベクトル $\vec{a}=(-2,5)$ は、横と縦にそれぞれどのように進むベクトルか答えよ。

演習 2：2 点から成分を求める

点 $A(4,-1)$、$B(-2,3)$ に対して、$\overrightarrow{AB}$ を成分表示せよ。

演習 3：逆向きのベクトル

演習 2 の点 A、B に対して、$\overrightarrow{BA}$ を成分表示せよ。また、$\overrightarrow{AB}$ との関係を答えよ。

演習 4：加法・減法・実数倍

$\vec{a}=(3,-2)$、$\vec{b}=(-4,1)$ のとき、次を成分表示せよ。
(1) $\vec{a}+\vec{b}$
(2) $\vec{a}-\vec{b}$
(3) $-3\vec{a}$

演習 5：ベクトルの相等

ベクトル $(x+2,\ 3y-1)$ と $(7,8)$ が等しいとき、x、y を求めよ。

©ミライコーチング

演習 6：複合した成分計算

$\vec{p}=(-2,3)$、$\vec{q}=(5,-1)$ のとき、$-2(\vec{p}-\vec{q})+\vec{q}$ を成分表示せよ。

7. 演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

第 1 成分は -2 なので横に負の向きへ 2、すなわち左へ 2 進む。第 2 成分は 5 なので上へ 5 進む。

演習 2 の解答・解説

終点 B の座標から始点 A の座標を引くので、

$$\overrightarrow{AB}=(-2-4,\ 3-(-1))=(-6,4)$$

である。

演習 3 の解答・解説

終点 A の座標から始点 B の座標を引くので、

$$\overrightarrow{BA}=(4-(-2),\ -1-3)=(6,-4)$$

である。両成分が $\overrightarrow{AB}=(-6,4)$ の符号を変えたものなので、$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$ である。

演習 4 の解答・解説

(1) $\vec{a}+\vec{b}=(3+(-4),\ -2+1)=(-1,-1)$ である。
(2) $\vec{a}-\vec{b}=(3-(-4),\ -2-1)=(7,-3)$ である。
(3) $-3\vec{a}=(-3\cdot 3,\ -3\cdot(-2))=(-9,6)$ である。

演習 5 の解答・解説

対応する成分を比較すると、$x+2=7$、$3y-1=8$ である。よって、$x=5$、$3y=9$ から $y=3$ である。

演習 6 の解答・解説

まず、$\vec{p}-\vec{q}=(-2-5,\ 3-(-1))=(-7,4)$ である。したがって、

$$\begin{aligned}-2(\vec{p}-\vec{q})+\vec{q}&=-2(-7,4)+(5,-1)\\&=(14,-8)+(5,-1)\\&=(19,-9)\end{aligned}$$