第 248 講 複素数平面

学習目標

- 複素数 $z=a+bi$ を複素数平面上の点 $P(a,b)$ と対応させられる。
- 複素数の実部・虚部と、複素数平面の実軸・虚軸を区別できる。
- 式から点を描き、点の座標から対応する複素数を読み取れる。
- 軸上の点と各象限の点を、実部と虚部の符号から分類できる。

1. 一つの複素数を二つの実数で見る

複素数の標準形を確認する

虚数単位 i は $i^2=-1$ を満たす数である。すべての複素数は、実数 a,b を用いて

$$z=a+bi$$

と表せる。このとき a を z の実部、b を z の虚部という。たとえば $z=2+3i$ の実部は 2、虚部は 3 である。

$a+bi=c+di$ であることと、$a=c$ かつ $b=d$ であることは同値である。したがって、一つの複素数は実数の組 (a,b) によってただ一つに定まる。

複素数平面

横軸に実部、縦軸に虚部を取った平面を複素数平面という。横軸を実軸、縦軸を虚軸という。
複素数 $z=a+bi$ には点 $P(a,b)$ を対応させる。反対に、平面上の点 $P(a,b)$ には複素数 $a+bi$ を対応させる。この対応は一対一である。

式と点の対応

$$z=a+bi \quad \leftrightarrow \quad P(a,b)$$

横座標は実部 a、縦座標は虚部の係数 b である。縦座標を bi と書くのではない。

例題 1：複素数から点を定める

複素数 $z=2+3i$ に対応する点 P を複素数平面上に示し、実部と虚部を答えよ。

例題 1 の解答・解説

$z=2+3i$ の実部は 2、虚部は 3 である。したがって、対応する点は $P(2,3)$ である。
原点から実軸の正の向きへ 2、そこから虚軸の正の向きへ 3 進んだ位置が P である。

©ミライコーチング

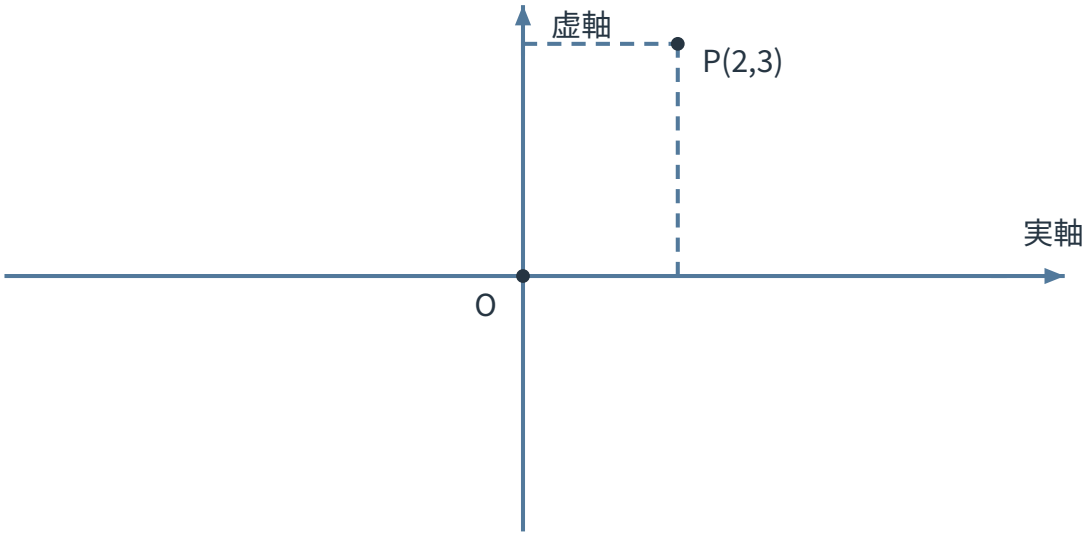

図 1　$z = 2 + 3i$ に対応する点 $P(2, 3)$

2. 軸上の点を読む

実数と純虚数は軸上に並ぶ

$b = 0$ の複素数 $a + 0i = a$ は点 $(a, 0)$ に対応するので、実数はすべて実軸上にある。
$a = 0$ の複素数 $0 + bi = bi$ は点 $(0, b)$ に対応する。$b \neq 0$ のとき、この数を純虚数という。純虚数は虚軸上にある。複素数 0 は点 $O(0, 0)$、すなわち実軸と虚軸の交点に対応する。

i と虚部を混同しない

$i = 0 + 1i$ に対応する点は $(0, 1)$ である。虚部は i ではなく 1 である。同様に、$-4i$ の虚部は -4 であり、対応する点は $(0, -4)$ である。

例題 2：点から複素数を読む

複素数平面上の点 $A(-3, 2)$、$B(0, -4)$、$C(5, 0)$ に対応する複素数をそれぞれ求めよ。また、実軸上または虚軸上にある点を答えよ。

例題 2 の解答・解説

点 (a, b) に対応する複素数は $a + bi$ である。よって、

$$A : -3 + 2i, \qquad B : -4i, \qquad C : 5$$

である。B は横座標が 0 なので虚軸上、C は縦座標が 0 なので実軸上にある。A はどちらの軸上にもない。

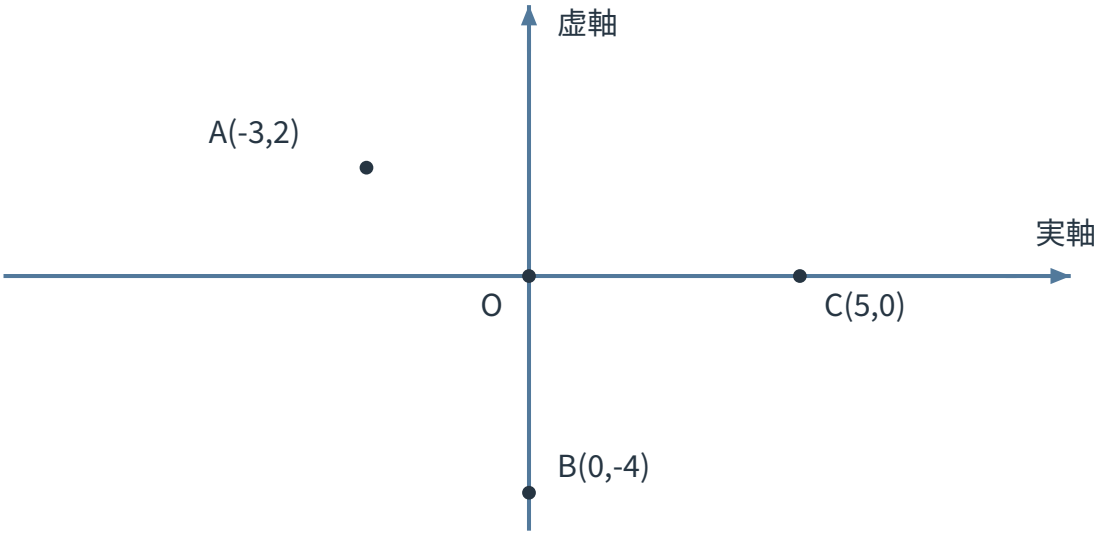

図 2　点の座標から対応する複素数を読む

3. 符号と位置を結び付ける

複素数平面の象限

実軸と虚軸でない部分は、座標平面と同じように第 1 象限から第 4 象限に分ける。$z = a + bi$ に対応する点の位置は、a と b の符号で決まる。

位置	実部 a	虚部 b
第 1 象限	$a > 0$	$b > 0$
第 2 象限	$a < 0$	$b > 0$
第 3 象限	$a < 0$	$b < 0$
第 4 象限	$a > 0$	$b < 0$

$a = 0$ または $b = 0$ の点は軸上であり、どの象限にも属さない。

例題 3：符号から位置を判断する

複素数 $z = -2 - 3i$、$w = 4 - i$、$u = -5$、$v = 2i$ に対応する点がどこにあるか答えよ。

例題 3 の解答・解説

z は実部・虚部がともに負なので第 3 象限にある。w は実部が正、虚部が負なので第 4 象限にある。$u = -5 + 0i$ は実軸の負の部分にあり、$v = 0 + 2i$ は虚軸の正の部分にある。u, v は象限には属さない。

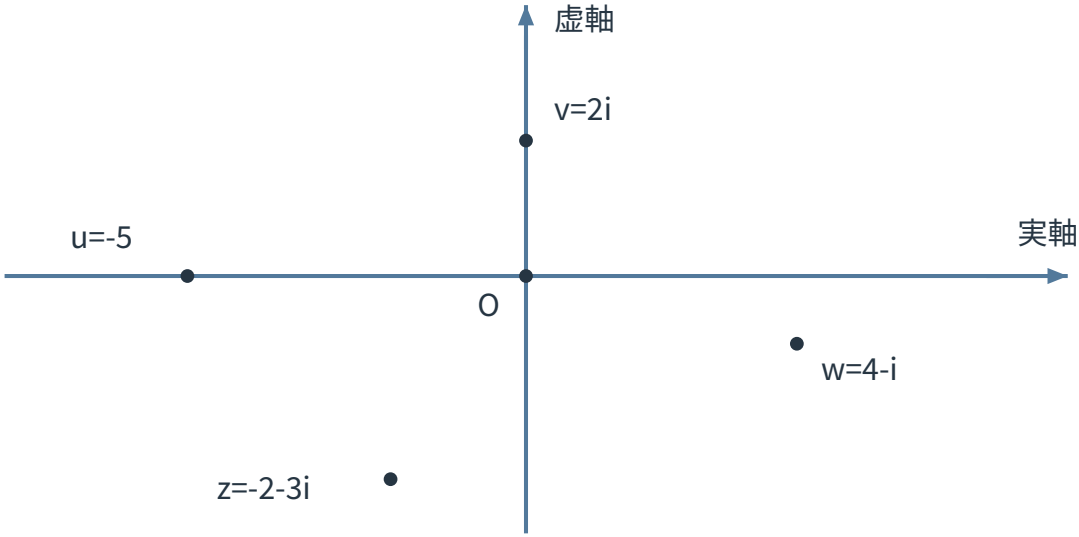

図 3　実部と虚部の符号が点の位置を決める

平面上の位置は複素数全体の大小を表さない

実数は数直線上で大小を比べられる。一方、一般の複素数について、点が右や上にあるというだけで複素数全体の大小を決めることはできない。複素数平面は、実部と虚部を用いて位置を表す図である。

4. 式・座標・図を往復する

読み書きの手順

1. 式から点へ進むときは、$a+bi$ の a と b を読み、点 (a, b) を取る。
2. 点から式へ進むときは、横座標を実部、縦座標を虚部として $a+bi$ と書く。
3. $a=0$ や $b=0$ でも省かずに確認してから、bi や a と簡潔に書く。
4. 象限を答えるときは、軸上の点を象限へ入れない。

演習

演習 1：実部と虚部

次の複素数の実部と虚部を答えよ。
(1) $3-5i$　(2) $-2+i$　(3) $-7i$　(4) 6

演習 2：式から点へ

次の複素数に対応する点の座標を答えよ。
(1) $1+4i$　(2) $-3-2i$　(3) $5i$　(4) -4

演習 3：点から式へ

次の点に対応する複素数を答えよ。
(1) $A(2,-5)$　(2) $B(-4,3)$　(3) $C(0,7)$　(4) $D(-6,0)$

演習 4：軸と象限

次の複素数に対応する点の位置を、第 1 象限から第 4 象限、実軸上（原点を除く）、虚軸上（原点を除く）、原点のいずれかで答えよ。
(1) $2+5i$　(2) $-1+3i$　(3) $-4-2i$　(4) $6-7i$　(5) $-3i$　(6) 0

演習 5：条件に合う複素数

$z=a+bi$ とする。対応する点が次の位置にあるための a, b の条件を答えよ。
(1) 実軸上　(2) 虚軸上　(3) 第 2 象限　(4) 第 4 象限

演習 6：誤りを直す

次の説明の誤りを直せ。
(1) $z=3-2i$ の虚部は $-2i$ である。
(2) i に対応する点は $(1,0)$ である。
(3) 点 $(-4,0)$ は第 2 象限にある。

演習の解答・解説

演習 1 の解答・解説

(1) 実部は 3、虚部は -5 である。
(2) 実部は -2、虚部は 1 である。
(3) $-7i=0-7i$ より、実部は 0、虚部は -7 である。
(4) $6=6+0i$ より、実部は 6、虚部は 0 である。

演習 2 の解答・解説

(1) $(1,4)$　(2) $(-3,-2)$　(3) $(0,5)$　(4) $(-4,0)$ である。

演習 3 の解答・解説

(1) $2-5i$　(2) $-4+3i$　(3) $7i$　(4) -6 である。

演習 4 の解答・解説

(1) は第 1 象限、(2) は第 2 象限、(3) は第 3 象限、(4) は第 4 象限である。(5) は実部が 0 なので虚軸上、(6) は原点である。

演習 5 の解答・解説

(1) 実軸上である条件は $b = 0$ である。
(2) 虚軸上である条件は $a = 0$ である。原点も両方の軸上に含まれる。
(3) 第 2 象限である条件は $a < 0, b > 0$ である。
(4) 第 4 象限である条件は $a > 0, b < 0$ である。

演習 6 の解答・解説

(1) 虚部は i の係数である実数 -2 である。
(2) $i = 0 + 1i$ なので、対応する点は $(0, 1)$ である。
(3) 点 $(-4, 0)$ は縦座標が 0 なので実軸上にある。軸上の点は象限に属さない。

©ミライコーチング