

GOAL この講でできるようになること

- ・ 因数分解を始める前に、共通因数があるか確認できる。
- ・ 共通因数を取り出したあと、乗法公式や和と積による因数分解が続けられる。
- ・ 置き換えによって、複雑な式を既知の形として見られる。
- ・ 一度因数分解したあと、さらに因数分解できる部分がないか確認できる。
- ・ 展開によって因数分解の結果を確かめられる。

EXPLANATION / 解説 因数分解は1回で終わるとは限らない

これまで、因数分解の方法をいくつか学びました。

- ・ 共通因数を取り出す
- ・ 平方の公式を逆に使う
- ・ 平方差を使う
- ・ 和と積から2数を探す

実際の式では、これらのうち1つだけを使って終わるとは限りません。

例えば、 $2x^2 + 10x + 12$ を考えます。

最初に、すべての項へ共通する2を取り出します。

$$2x^2 + 10x + 12 = 2(x^2 + 5x + 6)$$

括弧内の $x^2 + 5x + 6$ は、和が5、積が6になる2数2,3を使って、

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

と因数分解できます。

したがって、

$$2x^2 + 10x + 12 = 2(x + 2)(x + 3)$$

です。

因数分解では、1つの方法を使ったあとに、まだ続きがないかを見ることが大切です。

POINT 最初の確認は共通因数

因数分解する式を見たら、最初に全項へ共通する因数を探します。

例えば、

$$6x^2 - 24$$

には6が共通しています。

まず、

$$6x^2 - 24 = 6(x^2 - 4)$$

とします。

すると括弧内は平方差なので、

$$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$$

です。

したがって、

$$6x^2 - 24 = 6(x + 2)(x - 2)$$

となります。

共通因数を後回しにすると、式の形を見抜きにくくなることがあります。

EXPLANATION / 解説 括弧の中をもう一度見る

$3x^2 - 18x + 27$ を因数分解します。

3項すべてに3が共通しているので、

$$3x^2 - 18x + 27 = 3(x^2 - 6x + 9)$$

です。

ここで終わりにせず、括弧の中をもう一度見ます。

$x^2 - 6x + 9$ は、

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2$$

なので、

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

です。

したがって、

$$3x^2 - 18x + 27 = 3(x - 3)^2$$

となります。

因数分解では、括弧を作った瞬間にゴールではありません。新しくできた括弧の中も確認する必要があります。

EXPLANATION / 解説 置き換えると知っている形になる

$(x+1)^2 + 5(x+1) + 6$ を考えます。

$x+1$ が何度も現れています。

そこで、

$$A = x + 1$$

と置くと、元の式は

$$A^2 + 5A + 6$$

になります。

これは、和が 5、積が 6 になる 2 数 2, 3 を使って、

$$A^2 + 5A + 6 = (A + 2)(A + 3)$$

と因数分解できます。

$A = x + 1$ を戻すと、

$$(A + 2)(A + 3) = (x + 3)(x + 4)$$

です。

したがって、

$$(x + 1)^2 + 5(x + 1) + 6 = (x + 3)(x + 4)$$

となります。

複雑な式でも、同じまとまりが繰り返されているなら、そのまとまりを 1 つの文字として見ると構造が分かりやすくなります。

CAUTION / 注意 置き換えた文字は最後に元へ戻す

$A = x + 2$ と置いて因数分解した場合、答えを A のまま終えてはいけません。

例えば、

$$A^2 - 9 = (A + 3)(A - 3)$$

まで進んだら、最後に $A = x + 2$ を戻して、

$$(A + 3)(A - 3) = (x + 5)(x - 1)$$

とします。

置き換えは式を見やすくする途中の道具です。最終的な答えは、もとの文字で表します。

EXPLANATION / 解説 平方差がもう一度現れることもある

$x^4 - 16$ を考えます。

$x^4 = (x^2)^2$ 、 $16 = 4^2$ なので、まず平方差として、

$$x^4 - 16 = (x^2 + 4)(x^2 - 4)$$

とできます。

さらに、 $x^2 - 4$ はもう一度平方差になっています。

$$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$$

したがって、

$$x^4 - 16 = (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$$

です。

一度公式を使ったあとでも、新しくできた因数を確認します。

POINT 因数分解の判断順序

複数の方法が使えるような式では、次の順序で確認します。

1. 全項に共通因数がないか。
2. 平方の形や平方差になっていないか。
3. $x^2 + px + q$ の形なら、和と積から 2 数を探せないか。
4. 同じ式のまとまりが繰り返されていないか。
5. 因数分解したあと、さらに分解できる因数がないか。
6. 最後に展開して元の式へ戻るか確認する。

大切なのは公式をたくさん思い出すことではなく、今の式がどの形になっているかを順に調べることです。

例題 1 EXERCISE

$4x^2 + 20x + 24$ を因数分解しなさい。

3項すべてに4が共通しています。

$$4x^2 + 20x + 24 = 4(x^2 + 5x + 6)$$

括弧内では、和が5、積が6になる2数は2,3です。
したがって、

$$4(x^2 + 5x + 6) = 4(x + 2)(x + 3)$$

です。

よって、 $4x^2 + 20x + 24 = 4(x + 2)(x + 3)$ です。
最初に共通因数を取り出すことで、これまで学んだ形が見えやすくなります。

例題2 EXERCISE

$5x^2 - 20$ を因数分解しなさい。

2項には5が共通しているので、先に取り出します。

$$5x^2 - 20 = 5(x^2 - 4)$$

括弧内は、

$$x^2 - 4 = x^2 - 2^2$$

という平方差です。
したがって、

$$5x^2 - 20 = 5(x + 2)(x - 2)$$

です。

共通因数を取り出したあとに、平方差が残っていないか確認することがポイントです。

例題3 EXERCISE

$(x + 2)^2 + 7(x + 2) + 12$ を因数分解しなさい。

$x + 2$ が繰り返し現れているので、

$$A = x + 2$$

と置きます。
すると、

$$A^2 + 7A + 12$$

となります。

和が7、積が12になる2数は3,4なので、

$$A^2 + 7A + 12 = (A + 3)(A + 4)$$

です。

$A = x + 2$ を戻すと、

$$(A + 3)(A + 4) = (x + 5)(x + 6)$$

となります。

したがって、

$$(x + 2)^2 + 7(x + 2) + 12 = (x + 5)(x + 6)$$

です。

例題4 EXERCISE

$x^4 - 81$ を因数分解しなさい。

$x^4 = (x^2)^2$ 、 $81 = 9^2$ なので平方差を使います。

$$x^4 - 81 = (x^2 + 9)(x^2 - 9)$$

さらに、 $x^2 - 9$ も平方差です。

$$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$$

したがって、

$$x^4 - 81 = (x^2 + 9)(x + 3)(x - 3)$$

です。

$x^2 + 9$ は平方の和なので、ここまでの範囲ではさらに因数分解しません。

SECTION 1 演習問題

練習問題 1 EXERCISE

次の式を因数分解しなさい。

- (1) $2x^2 + 14x + 24$
- (2) $3x^2 - 15x + 18$
- (3) $5x^2 + 25x + 30$

練習問題 2 EXERCISE

次の式を因数分解しなさい。

- (1) $2x^2 - 18$
- (2) $3x^2 - 27$
- (3) $8x^2 - 72$

練習問題 3 EXERCISE

次の式を因数分解しなさい。

- (1) $2x^2 + 8x + 8$
- (2) $3x^2 - 18x + 27$
- (3) $5x^2 + 20x + 20$

練習問題 4 EXERCISE

次の式を因数分解しなさい。

- (1) $(x+1)^2 + 5(x+1) + 6$
- (2) $(x-2)^2 + 7(x-2) + 10$
- (3) $(2x+1)^2 - 5(2x+1) + 6$

練習問題 5 EXERCISE

次の式を因数分解しなさい。

- (1) $(x+3)^2 - 16$
- (2) $(2x-1)^2 - 9$
- (3) $(x-4)^2 - 25$

練習問題 6 EXERCISE

次の式を、これ以上この講までの方法で因数分解できないところまで因数分解しなさい。

- (1) $x^4 - 25$
- (2) $x^4 - 16$
- (3) $16x^4 - 81$

練習問題 7 EXERCISE

$6x^2 + 30x + 36$ を因数分解するとき、次のうち最初に行う操作として最も適切なものを 1 つ選びなさい。

- ・ア 和が 30、積が 36 になる 2 数を探す。
- ・イ 全項から共通因数 6 を取り出す。
- ・ウ 平方差の公式を使う。
- ・エ $x+6$ を新しい文字に置き換える。

練習問題 8 EXERCISE

ある生徒は、

$$4x^2 - 36 = 4(x^2 - 9)$$

まで変形して因数分解を終えました。

この式が正しいか答えなさい。また、これ以上因数分解できるなら、最後まで因数分解しなさい。

SECTION 2 演習問題の解答・解説

ANSWER / 解答 練習問題 1 の解答・解説

(1) 全項に 2 が共通しています。

$$\begin{aligned}2x^2 + 14x + 24 &= 2(x^2 + 7x + 12) \\ &= 2(x + 3)(x + 4)\end{aligned}$$

括弧内では、和が 7、積が 12 になる 2 数 3, 4 を使いました。

(2) 全項に 3 が共通しています。

$$\begin{aligned}3x^2 - 15x + 18 &= 3(x^2 - 5x + 6) \\ &= 3(x - 2)(x - 3)\end{aligned}$$

括弧内では、和が -5、積が 6 になる 2 数は -2, -3 です。

(3) 全項に 5 が共通しています。

$$\begin{aligned}5x^2 + 25x + 30 &= 5(x^2 + 5x + 6) \\ &= 5(x + 2)(x + 3)\end{aligned}$$

どの問題も、共通因数を取り出したあとに括弧内をさらに因数分解します。

ANSWER / 解答 練習問題 2 の解答・解説

(1) 2 を取り出します。

$$\begin{aligned}2x^2 - 18 &= 2(x^2 - 9) \\ &= 2(x + 3)(x - 3)\end{aligned}$$

(2) 3 を取り出します。

$$\begin{aligned}3x^2 - 27 &= 3(x^2 - 9) \\ &= 3(x + 3)(x - 3)\end{aligned}$$

(3) 8 を取り出します。

$$\begin{aligned}8x^2 - 72 &= 8(x^2 - 9) \\ &= 8(x + 3)(x - 3)\end{aligned}$$

共通因数を取り出すと、括弧内に平方差が現れます。

ANSWER / 解答 練習問題 3 の解答・解説

(1)

$$\begin{aligned}2x^2 + 8x + 8 &= 2(x^2 + 4x + 4) \\ &= 2(x + 2)^2\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}3x^2 - 18x + 27 &= 3(x^2 - 6x + 9) \\ &= 3(x - 3)^2\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}5x^2 + 20x + 20 &= 5(x^2 + 4x + 4) \\ &= 5(x + 2)^2\end{aligned}$$

共通因数を取り出したあと、括弧内が平方の公式を逆に使える形になっています。

(1) $A = x + 1$ と置きます。

$$\begin{aligned}(x+1)^2 + 5(x+1) + 6 &= A^2 + 5A + 6 \\ &= (A+2)(A+3) \\ &= (x+3)(x+4)\end{aligned}$$

(2) $A = x - 2$ と置きます。

$$\begin{aligned}(x-2)^2 + 7(x-2) + 10 &= A^2 + 7A + 10 \\ &= (A+2)(A+5) \\ &= x(x+3)\end{aligned}$$

(3) $A = 2x + 1$ と置きます。

$$\begin{aligned}(2x+1)^2 - 5(2x+1) + 6 &= A^2 - 5A + 6 \\ &= (A-2)(A-3) \\ &= (2x-1)(2x-2) \\ &= 2(2x-1)(x-1)\end{aligned}$$

最後の問題では、置き換えを戻したあとにも $2x-2 = 2(x-1)$ と因数分解できます。最後まで共通因数を確認します。

ANSWER / 解答 練習問題 5 の解答・解説

(1) $x+3$ をひとまとまりとして見ると平方差です。

$$\begin{aligned}(x+3)^2 - 16 &= (x+3)^2 - 4^2 \\ &= (x+7)(x-1)\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}(2x-1)^2 - 9 &= (2x-1)^2 - 3^2 \\ &= (2x+2)(2x-4) \\ &= 4(x+1)(x-2)\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}(x-4)^2 - 25 &= (x-4)^2 - 5^2 \\ &= (x+1)(x-9)\end{aligned}$$

平方差では、まとまり全体を 1 つの式として見ます。因数分解したあとに共通因数が現れた場合は、さらに取り出します。

ANSWER / 解答 練習問題 6 の解答・解説

(1) $x^4 = (x^2)^2$ と見ます。

$$\begin{aligned}x^4 - 25 &= (x^2)^2 - 5^2 \\ &= (x^2+5)(x^2-5)\end{aligned}$$

この講までの範囲では、ここで止めます。

(2)

$$\begin{aligned}x^4 - 16 &= (x^2)^2 - 4^2 \\ &= (x^2+4)(x^2-4) \\ &= (x^2+4)(x+2)(x-2)\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}16x^4 - 81 &= (4x^2)^2 - 9^2 \\ &= (4x^2+9)(4x^2-9) \\ &= (4x^2+9)(2x+3)(2x-3)\end{aligned}$$

平方差を使ったあと、新しくできた因数が再び平方差になっていないか確認します。

ANSWER / 解答 練習問題 7 の解答・解説

正しい選択肢はイです。

$6x^2+30x+36$ では、3 項すべてに 6 が共通しています。

したがって、最初に

$$6x^2 + 30x + 36 = 6(x^2 + 5x + 6)$$

とします。

さらに、

$$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$$

なので、

$$6x^2 + 30x + 36 = 6(x+2)(x+3)$$

です。

複数の方法が使えるような場合でも、最初に共通因数を確認すると式を単純にできます。

ANSWER / 解答 練習問題 8 の解答・解説

$$4x^2 - 36 = 4(x^2 - 9)$$

は、右辺を展開すると $4x^2 - 36$ になるので正しい変形です。

ただし、 $x^2 - 9$ は平方差なので、さらに因数分解できます。

$$\begin{aligned}4x^2 - 36 &= 4(x^2 - 9) \\ &= 4(x+3)(x-3)\end{aligned}$$

したがって、最後まで因数分解すると $4(x+3)(x-3)$ です。

因数分解では、途中の式が正しいかだけでなく、まだ因数分解できる部分が残っていないかも確認します。