

## 第 21 講 鈍角まで三角比を広げる

### 学習目標

- 三角比を  $0^\circ$  以上  $180^\circ$  以下の角まで広げる考え方を説明できる。
- 鈍角での  $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$  の符号を判断できる。
- $\sin(180^\circ - \theta)$ 、 $\cos(180^\circ - \theta)$ 、 $\tan(180^\circ - \theta)$  を鋭角の三角比へ直せる。
- $120^\circ$ 、 $135^\circ$ 、 $150^\circ$  などの三角比を正確に求められる。

## 直角三角形だけでは鈍角を扱えない

### 三角比を広げる必要がある

これまでの  $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$  は、直角三角形の鋭角について考えてきました。しかし、三角形には  $90^\circ$  より大きい角が現れることもあります。たとえば  $120^\circ$  のような角です。直角三角形の中に  $120^\circ$  の角をつくることはできないので、これまでの「辺の比」だけでは直接定義できません。

そこで、座標平面上の点を使って三角比を広げます。  
この拡張でも、鋭角で学んだ三角比と矛盾しないように定義します。

## 座標を使って三角比を定める

### 角の終辺上の点を見る

原点を  $O$  とし、正の  $x$  軸から反時計回りに角  $\theta$  だけ回った半直線上に点  $P(x, y)$  を取ります。  
 $OP = r$  とすると、 $r > 0$  です。  
このとき、

$$\sin \theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

と定めます。  
 $x \neq 0$  のときは、

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

と定めます。  
鋭角では  $x > 0$ 、 $y > 0$  なので、この定義は直角三角形で学んだ「向かい側・となり・斜辺」の比と一致します。

### 座標で見る三角比

点  $P(x, y)$  が角  $\theta$  の終辺上にあり、 $OP = r$  のとき、

- $\sin \theta$  は  $y$  と  $r$  の比
- $\cos \theta$  は  $x$  と  $r$  の比
- $\tan \theta$  は  $y$  と  $x$  の比

として考えます。

この見方によって、鈍角にも三角比を広げられます。

## 鈍角では符号が変わる

### 90° より大きく 180° より小さい角

90° <  $\theta$  < 180° とします。

この範囲では、角の終辺は座標平面の左上にあります。

したがって、終边上の点  $P(x, y)$  について  $x < 0$ 、 $y > 0$  です。また、距離  $r$  は常に正です。

そのため、 $\sin \theta = \frac{y}{r}$  は正です。

一方、 $\cos \theta = \frac{x}{r}$  は負です。

さらに、 $\tan \theta = \frac{y}{x}$  は負です。

### 鈍角の三角比の符号

90° <  $\theta$  < 180° のとき、

- $\sin \theta > 0$
- $\cos \theta < 0$
- $\tan \theta < 0$

です。

値を計算する前に、答えが正か負かを確認すると符号のミスを防げます。

### 鋭角の値をそのまま使わない

たとえば 120° は 60° と関係がありますが、 $\cos 120^\circ$  と  $\cos 60^\circ$  は同じ値ではありません。

120° は鈍角なので、余弦は負になります。

角を鋭角へ直したあとも、三角比の種類ごとの符号を確認する必要があります。

## 180° - $\theta$ の関係

### 左右反対の点を比べる

0° <  $\theta$  < 90° とします。

角  $\theta$  と角 180° -  $\theta$  に対応する点を、同じ半径の円上で考えます。

この 2 点は左右対称になるため、 $y$  座標は同じですが、 $x$  座標の符号は反対になります。

したがって、正弦は同じ値になります。

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$$

余弦は符号が反対になります。

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$$

正接も符号が反対になります。

$$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$$

### 補角の三角比

鋭角  $\theta$  について、

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$$

が成り立ちます。

鈍角の三角比は、 $180^\circ$  からその角を引いて鋭角へ戻すと求めやすくなります。

## 120° の三角比

$120^\circ = 180^\circ - 60^\circ$  と見る

$120^\circ$  は、

$$120^\circ = 180^\circ - 60^\circ$$

と表せます。

したがって、 $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$  です。

余弦は符号が反対になるので、 $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$  です。

正接も符号が反対になるので、 $\tan 120^\circ = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$  です。

「鋭角へ戻して大きさを求める」「鈍角での符号を付ける」という 2 段階で考えます。

## 0°、90°、180° の三角比

### 座標の定義なら端の角も扱える

半径を 1 として考えます。

$\theta = 0^\circ$  のとき、対応する点は  $(1, 0)$  なので、 $\sin 0^\circ = 0$ 、 $\cos 0^\circ = 1$ 、 $\tan 0^\circ = 0$  です。

$\theta = 90^\circ$  のとき、対応する点は  $(0, 1)$  なので、 $\sin 90^\circ = 1$ 、 $\cos 90^\circ = 0$  です。

ただし、 $\tan 90^\circ$  は  $\frac{1}{0}$  に対応するため、値を定めることができません。

$\theta = 180^\circ$  のとき、対応する点は  $(-1, 0)$  なので、 $\sin 180^\circ = 0$ 、 $\cos 180^\circ = -1$ 、 $\tan 180^\circ = 0$  です。

| $\theta$    | $\sin \theta$ | $\cos \theta$ | $\tan \theta$ |
|-------------|---------------|---------------|---------------|
| $0^\circ$   | 0             | 1             | 0             |
| $90^\circ$  | 1             | 0             | 定義されない        |
| $180^\circ$ | 0             | -1            | 0             |

### $\tan 90^\circ$ は存在しない

$\tan \theta = \frac{y}{x}$  なので、 $x = 0$  となる  $90^\circ$  では分母が 0 になります。

0 で割ることはできないため、 $\tan 90^\circ$  は定義されません。

## 特別な鈍角の値を整理する

| $\theta$    | $\sin \theta$        | $\cos \theta$         | $\tan \theta$         |
|-------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $120^\circ$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$        | $-\sqrt{3}$           |
| $135^\circ$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | -1                    |
| $150^\circ$ | $\frac{1}{2}$        | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

### 鈍角の特別な値を求める手順

1.  $180^\circ$  から鈍角を引き、対応する鋭角を求める。
2.  $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $60^\circ$  の三角比を使って値の大きさを求める。
3. 鈍角では  $\sin$  は正、 $\cos$  と  $\tan$  は負であることを確認する。

## 例題

### 例題 1

次の値を求めなさい。

- (1)  $\sin 150^\circ$
- (2)  $\cos 150^\circ$
- (3)  $\tan 150^\circ$

### 例題 1 の解答・解説

$150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$  です。

したがって、 $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$  です。

余弦は鈍角で負になるので、 $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  です。

正接も負になるので、 $\tan 150^\circ = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  です。

### 例題 2

次の値を求めなさい。

- (1)  $\sin 135^\circ$
- (2)  $\cos 135^\circ$
- (3)  $\tan 135^\circ$

### 例題 2 の解答・解説

$135^\circ = 180^\circ - 45^\circ$  です。

したがって、 $\sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$  です。

また、 $\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  です。

さらに、 $\tan 135^\circ = -\tan 45^\circ = -1$  です。

### 例題 3

$90^\circ < \theta < 180^\circ$  で、 $\sin \theta = \frac{3}{5}$  とする。

$\cos \theta$  と  $\tan \theta$  を求めなさい。

### 例題 3 の解答・解説

三角比の相互関係から、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  です。

したがって、

$$\cos^2 \theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

です。

$\theta$  は鈍角なので  $\cos \theta < 0$  です。よって、 $\cos \theta = -\frac{4}{5}$  です。

さらに、 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$  なので、 $\tan \theta = -\frac{3}{4}$  です。

## 演習問題

### 練習問題 1

次の三角比の符号を、正または負で答えなさい。ただし、 $90^\circ < \theta < 180^\circ$  とする。

- (1)  $\sin \theta$
- (2)  $\cos \theta$
- (3)  $\tan \theta$

### 練習問題 2

次の値を求めなさい。

- (1)  $\sin 120^\circ$
- (2)  $\cos 120^\circ$
- (3)  $\tan 120^\circ$

### 練習問題 3

次の値を求めなさい。

- (1)  $\sin 135^\circ$
- (2)  $\cos 150^\circ$
- (3)  $\tan 150^\circ$

### 練習問題 4

次の値を求めなさい。

- (1)  $\sin 0^\circ$
- (2)  $\cos 90^\circ$
- (3)  $\sin 180^\circ$
- (4)  $\cos 180^\circ$

### 練習問題 5

次の等式が正しければ「正」、誤っていれば「誤」と答えなさい。

- (1)  $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ$
- (2)  $\cos 120^\circ = \cos 60^\circ$
- (3)  $\tan 135^\circ = -\tan 45^\circ$
- (4)  $\sin 150^\circ = -\sin 30^\circ$

### 練習問題 6

$90^\circ < \theta < 180^\circ$  で、 $\cos \theta = -\frac{5}{13}$  とする。  
 $\sin \theta$  と  $\tan \theta$  を求めなさい。

**練習問題 7**

$90^\circ < \theta < 180^\circ$  で、 $\tan \theta = -\frac{8}{15}$  とする。  
 $\sin \theta$  と  $\cos \theta$  を求めなさい。

**練習問題 8**

ある生徒は、 $120^\circ = 180^\circ - 60^\circ$  であることから、 $\cos 120^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$  としました。  
この計算が誤っている理由を説明し、正しい値を求めなさい。

**演習問題の解答・解説****練習問題 1 の解答・解説**

$90^\circ < \theta < 180^\circ$  では、終边上の点は左上にあります。  
したがって、 $y > 0$ 、 $x < 0$  です。  
よって、(1)  $\sin \theta$  は正、(2)  $\cos \theta$  は負、(3)  $\tan \theta$  は負です。

**練習問題 2 の解答・解説**

$120^\circ = 180^\circ - 60^\circ$  です。  
(1)  $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$  です。  
(2)  $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$  です。  
(3)  $\tan 120^\circ = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$  です。

**練習問題 3 の解答・解説**

(1)  $135^\circ = 180^\circ - 45^\circ$  なので、 $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$  です。  
(2)  $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$  なので、 $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  です。  
(3) 同じく、 $\tan 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  です。

**練習問題 4 の解答・解説**

座標による三角比の定義を使います。  
(1)  $\sin 0^\circ = 0$  です。  
(2)  $\cos 90^\circ = 0$  です。  
(3)  $\sin 180^\circ = 0$  です。  
(4)  $\cos 180^\circ = -1$  です。

**練習問題 5 の解答・解説**

(1) 正です。 $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$  なので、両方とも  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  です。  
(2) 誤です。 $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ 、 $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$  です。  
(3) 正です。 $\tan 135^\circ = -1$ 、 $\tan 45^\circ = 1$  です。  
(4) 誤です。 $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$  です。  
したがって、順に「正、誤、正、誤」です。

**練習問題 6 の解答・解説**

---

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  より、

$$\sin^2 \theta = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$$

です。

$\theta$  は鈍角なので  $\sin \theta > 0$  です。したがって、 $\sin \theta = \frac{12}{13}$  です。

さらに、 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$  より、 $\tan \theta = -\frac{12}{5}$  です。

**練習問題 7 の解答・解説**

---

$\tan \theta = -\frac{8}{15}$  なので、辺の大きさの比を  $8:15$  と考えます。

三平方の定理から、対応する斜辺の比は  $17$  です。

$\theta$  は鈍角なので、 $\sin \theta$  は正、 $\cos \theta$  は負です。

したがって、 $\sin \theta = \frac{8}{17}$ 、 $\cos \theta = -\frac{15}{17}$  です。

**練習問題 8 の解答・解説**

---

$120^\circ$  と  $60^\circ$  では余弦の値の大きさは同じですが、符号が異なります。

$120^\circ$  は鈍角なので、終边上の点の  $x$  座標は負です。そのため  $\cos 120^\circ$  は負になります。

したがって、

$$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

です。