

第 91 講 内分点・外分点

学習目標

- ・ 線分を内分する点と外分する点の位置関係を説明できる。
- ・ 数直線上と座標平面上で、内分点・外分点の座標を求められる。
- ・ $AP : PB = m : n$ の比の向きを確認し、外分点が A 側と B 側のどちらにあるかを判断できる。

内分とは何か

内分点

異なる 2 点 A, B に対し、線分 AB の内部にある点 P が

$$AP : PB = m : n$$

を満たすとき、 P を線分 AB を $m : n$ に内分する点という。ただし、 m, n は正の数である。

比の向きから位置を考える

$AP : PB = m : n$ という比では、 m は A から P までの長さに対応し、 n は P から B までの長さに対応する。

たとえば $AP : PB = 2 : 3$ なら、 AP と PB を同じ長さの単位でそれぞれ 2 個分、3 個分と考える。

したがって、 P は A から B へ全体の $\frac{2}{5}$ だけ進んだ位置にある。

一般に $AP : PB = m : n$ なら、 A から B へ進む割合は

$$\frac{m}{m+n}$$

である。この見方が内分点の公式のもとになる。

数直線上の内分点

内分点の座標を導く

数直線上で A の座標を a 、 B の座標を b とする。線分 AB を $m : n$ に内分する点を P とする。

P は A から B へ $\frac{m}{m+n}$ だけ進んだ位置なので、 P の座標を p とすると

$$p = a + \frac{m}{m+n}(b-a)$$

である。整理すると、

$$\begin{aligned} p &= a + \frac{m(b-a)}{m+n} \\ &= \frac{a(m+n) + mb - ma}{m+n} \\ &= \frac{na + mb}{m+n} \end{aligned}$$

となる。

数直線上の内分点

数直線上の 2 点 $A(a), B(b)$ を $m:n$ に内分する点 P の座標は

$$p = \frac{na + mb}{m + n}$$

である。

A の座標 a には n 、 B の座標 b には m が掛かる。これは、 A から B へ進む割合が $\frac{m}{m+n}$ であることから生じる。

例題 1：数直線上の内分点

数直線上の 2 点 $A(-2), B(8)$ がある。線分 AB を $3:2$ に内分する点 P の座標を求めよ。

例題 1 の解答・解説

$AP:PB = 3:2$ なので、 $m = 3, n = 2$ である。

内分点の公式より、

$$\begin{aligned} p &= \frac{2 \cdot (-2) + 3 \cdot 8}{3 + 2} \\ &= \frac{-4 + 24}{5} \\ &= 4 \end{aligned}$$

となる。

したがって、 P の座標は 4 である。

$A = -2$ と $B = 8$ の間に 4 があるため、位置関係からも内分点として正しいことを確認できる。

座標平面上の内分点**各座標を同じ割合で動かす**

座標平面上で $A(a, b)$ 、 $B(c, d)$ とし、線分 AB を $m:n$ に内分する点を P とする。

A から B へ $\frac{m}{m+n}$ だけ進むと考えると、 x 座標は a から c へ、 y 座標は b から d へ、それぞれ同じ割合だけ変化する。

したがって、

$$\begin{aligned} x_P &= a + \frac{m}{m+n}(c-a) = \frac{na + mc}{m+n}, \\ y_P &= b + \frac{m}{m+n}(d-b) = \frac{nb + md}{m+n} \end{aligned}$$

である。

座標平面上の内分点

2 点 $A(a, b)$ 、 $B(c, d)$ を $m : n$ に内分する点 P は

$$P\left(\frac{na + mc}{m + n}, \frac{nb + md}{m + n}\right)$$

である。

x 座標と y 座標を別々に同じ公式へ当てはめればよい。

比の順序を逆にしない

$AP : PB = m : n$ では、 A の座標に掛ける数は n 、 B の座標に掛ける数は m である。

単に左から m, n の順に掛けるのではない。 A から B へ進む割合が $\frac{m}{m+n}$ であることを確認すると、係数の向きを復元できる。

例題 2：座標平面上の内分点

2 点 $A(-3, 1)$ 、 $B(7, 6)$ がある。線分 AB を $2 : 3$ に内分する点 P の座標を求めよ。

例題 2 の解答・解説

$AP : PB = 2 : 3$ なので、 $m = 2, n = 3$ である。

x 座標は

$$\begin{aligned} x_P &= \frac{3 \cdot (-3) + 2 \cdot 7}{2 + 3} \\ &= \frac{-9 + 14}{5} \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。

y 座標は

$$\begin{aligned} y_P &= \frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot 6}{2 + 3} \\ &= \frac{3 + 12}{5} \\ &= 3 \end{aligned}$$

である。

したがって、 $P(1, 3)$ である。

外分とは何か

外分点

異なる 2 点 A, B に対し、線分 AB の外側にある点 P が

$$AP : PB = m : n$$

を満たすとき、 P を線分 AB を $m : n$ に外分する点という。ただし、 m, n は正の数であり、 $m \neq n$ とする。

外分点はどちら側にあるか

外分点 P は A, B の間にはない。 B 側なら $AP > PB$ なので $m > n$ 、 A 側なら $AP < PB$ なので $m < n$ である。 $m = n$ のとき、有限の位置に外分点は存在しない。

外分点の座標

外分点の公式を導く

A から B へ向かう変化を基準にすると、外分点 P は A から $\frac{m}{m-n}$ 倍だけ進んだ位置にある。数直線上で $A(a), B(b)$ とすると、

$$p = a + \frac{m}{m-n}(b-a)$$

である。これを整理すると、

$$\begin{aligned} p &= a + \frac{m(b-a)}{m-n} \\ &= \frac{a(m-n) + mb - ma}{m-n} \\ &= \frac{mb - na}{m-n} \end{aligned}$$

となる。

$m > n$ なら $\frac{m}{m-n} > 1$ なので B 側へ、 $m < n$ なら $\frac{m}{m-n} < 0$ なので A 側へ進む。

外分点の公式

数直線上の 2 点 $A(a), B(b)$ を $m : n$ に外分する点 P の座標は

$$p = \frac{mb - na}{m - n}$$

である。

座標平面上の 2 点 $A(a, b), B(c, d)$ を $m : n$ に外分する点 P は

$$P\left(\frac{mc - na}{m - n}, \frac{md - nb}{m - n}\right)$$

である。

外分では分母が $m - n$ になるため、 $m = n$ は使えない。

内分と外分の符号

内分では分母が $m + n$ であり、2 点の座標を足し合わせる形である。

外分では分母が $m - n$ であり、一方の座標を引く形である。

公式だけで判断せず、求めた点が本当に線分 AB の外側にあるかを最後に確認することが重要である。

例題 3：B 側にある外分点

数直線上の 2 点 $A(1), B(7)$ がある。線分 AB を $2:1$ に外分する点 P の座標を求めよ。

例題 3 の解答・解説

$AP:PB = 2:1$ なので、 $m = 2, n = 1$ である。

外分点の公式より、

$$\begin{aligned} p &= \frac{2 \cdot 7 - 1 \cdot 1}{2 - 1} \\ &= 13 \end{aligned}$$

となる。

したがって、 P の座標は 13 である。

$m > n$ なので、外分点は B 側の外側にあるはずである。実際に $1 < 7 < 13$ となっており、位置関係も一致している。

さらに、 $AP = 12$ 、 $PB = 6$ なので、 $AP:PB = 2:1$ である。

例題 4：A 側にある外分点

2 点 $A(-2, 4)$ 、 $B(4, -2)$ がある。線分 AB を $1:2$ に外分する点 P の座標を求めよ。

例題 4 の解答・解説

$AP : PB = 1 : 2$ なので、 $m = 1, n = 2$ である。

x 座標は

$$\begin{aligned}x_P &= \frac{1 \cdot 4 - 2 \cdot (-2)}{1 - 2} \\&= \frac{8}{-1} \\&= -8\end{aligned}$$

である。

y 座標は

$$\begin{aligned}y_P &= \frac{1 \cdot (-2) - 2 \cdot 4}{1 - 2} \\&= \frac{-10}{-1} \\&= 10\end{aligned}$$

である。

したがって、 $P(-8, 10)$ である。

$m < n$ なので、外分点は A 側の外側にある。 $A(-2, 4)$ から $B(4, -2)$ へ進む向きと反対側に $P(-8, 10)$ があるため、位置関係も正しい。

演習問題

演習問題 1

数直線上の 2 点 $A(-7), B(8)$ がある。線分 AB を $2 : 3$ に内分する点 P の座標を求めよ。

演習問題 2

2 点 $A(2, -4), B(12, 6)$ がある。線分 AB を $3 : 2$ に内分する点 P の座標を求めよ。

演習問題 3

2 点 $A(-1, 2), B(5, 8)$ がある。線分 AB を $3 : 1$ に外分する点 P の座標を求めよ。また、 P が A 側と B 側のどちらにあるか答えよ。

演習問題 4

2 点 $A(4, -1), B(10, 5)$ がある。線分 AB を $2 : 5$ に外分する点 P の座標を求めよ。また、 P が A 側と B 側のどちらにあるか答えよ。

演習問題 5

異なる 2 点 A, B に対して、線分 AB を $5:2$ に外分する点と、 $2:5$ に外分する点を考える。それぞれの外分点が A 側と B 側のどちらにあるか答えよ。

演習問題 6

点 $A(-4, 1)$ と点 B を結ぶ線分を $2:1$ に内分する点が $P(2, 5)$ である。点 B の座標を求めよ。

演習問題 7

2 点 $A(1, -2)$ 、 $B(9, 6)$ の間に点 $P(7, 4)$ がある。 $AP:PB$ を最も簡単な整数比で求めよ。

演習問題 8

異なる 2 点 A, B に対して、線分 AB を $1:1$ に外分する有限の点が存在しない理由を、外分点の公式と位置関係の両方から説明せよ。

演習問題の解答・解説

演習問題 1 の解答・解説

$AP:PB = 2:3$ なので、 $m = 2, n = 3$ である。

$$\begin{aligned} p &= \frac{3 \cdot (-7) + 2 \cdot 8}{2 + 3} \\ &= \frac{-21 + 16}{5} \\ &= -1 \end{aligned}$$

したがって、 P の座標は -1 である。

$-7 < -1 < 8$ なので、 P が線分 AB の内部にあることも確認できる。

演習問題 2 の解答・解説

$AP : PB = 3 : 2$ なので、 $m = 3, n = 2$ である。

x 座標は

$$\begin{aligned}x_P &= \frac{2 \cdot 2 + 3 \cdot 12}{3 + 2} \\&= \frac{40}{5} \\&= 8\end{aligned}$$

である。

y 座標は

$$\begin{aligned}y_P &= \frac{2 \cdot (-4) + 3 \cdot 6}{3 + 2} \\&= \frac{10}{5} \\&= 2\end{aligned}$$

である。

したがって、 $P(8, 2)$ である。

演習問題 3 の解答・解説

$AP : PB = 3 : 1$ なので、 $m = 3, n = 1$ である。

x 座標は

$$\begin{aligned}x_P &= \frac{3 \cdot 5 - 1 \cdot (-1)}{3 - 1} \\&= \frac{16}{2} \\&= 8\end{aligned}$$

である。

y 座標は

$$\begin{aligned}y_P &= \frac{3 \cdot 8 - 1 \cdot 2}{3 - 1} \\&= \frac{22}{2} \\&= 11\end{aligned}$$

である。

したがって、 $P(8, 11)$ である。

また、 $m > n$ なので、 P は B 側の外側にある。

演習問題 4 の解答・解説

$AP : PB = 2 : 5$ なので、 $m = 2, n = 5$ である。

x 座標は

$$\begin{aligned}x_P &= \frac{2 \cdot 10 - 5 \cdot 4}{2 - 5} \\&= \frac{0}{-3} \\&= 0\end{aligned}$$

である。

y 座標は

$$\begin{aligned}y_P &= \frac{2 \cdot 5 - 5 \cdot (-1)}{2 - 5} \\&= \frac{15}{-3} \\&= -5\end{aligned}$$

である。

したがって、 $P(0, -5)$ である。

また、 $m < n$ なので、 P は A 側の外側にある。

演習問題 5 の解答・解説

$5 : 2$ に外分するときは $m = 5, n = 2$ であり、 $m > n$ である。したがって、外分点は B 側の外側にある。

$2 : 5$ に外分するときは $m = 2, n = 5$ であり、 $m < n$ である。したがって、外分点は A 側の外側にある。

比の大小を確認すれば、座標を計算しなくても外分点の位置を判断できる。

演習問題 6 の解答・解説

点 B を $B(x, y)$ とする。

$AP : PB = 2 : 1$ なので、内分点の公式より

$$2 = \frac{1 \cdot (-4) + 2x}{2 + 1}$$

である。したがって、

$$6 = -4 + 2x$$

$$2x = 10$$

$$x = 5$$

となる。

同様に y 座標について、

$$5 = \frac{1 \cdot 1 + 2y}{2 + 1}$$

である。したがって、

$$15 = 1 + 2y$$

$$2y = 14$$

$$y = 7$$

となる。

よって、 $B(5, 7)$ である。

演習問題 7 の解答・解説

$A(1, -2)$ から $B(9, 6)$ へ移ると、 x 座標は 8 増加する。

一方、 $A(1, -2)$ から $P(7, 4)$ へ移ると、 x 座標は 6 増加する。したがって、 P は A から B へ

$$\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

だけ進んだ位置にある。

内分比を $AP : PB = m : n$ とすると、

$$\frac{m}{m + n} = \frac{3}{4}$$

であるため、

$$m : n = 3 : 1$$

となる。

y 座標についても、 A から B への増加量は 8、 A から P への増加量は 6 であり、同じ $\frac{3}{4}$ となる。

したがって、 $AP : PB = 3 : 1$ である。

演習問題 8 の解答・解説

1:1 に外分するときは $m = n = 1$ である。

外分点の公式では分母が $m - n$ なので、

$$m - n = 1 - 1 = 0$$

となる。0 を分母にすることはできないため、有限の座標を持つ外分点は求められない。

位置関係からも確認できる。外分点が B 側にあるなら $AP > PB$ であり、 A 側にあるなら $AP < PB$ である。したがって、異なる 2 点 A, B に対して、線分の外側にある点が $AP = PB$ を満たすことはない。

よって、異なる 2 点 A, B を 1:1 に外分する有限の点は存在しない。