第 238 講 放物線

学習目標

- 放物線を、焦点と準線から等距離にある点の軌跡として説明できる。
- 焦点と準線から放物線の基本形を導き、基本形から焦点・準線・軸・開く向きを読み取れる。
- $y^2 = 4px$ と $x^2 = 4py$ について、p の符号も含めて焦点と準線を求められる。

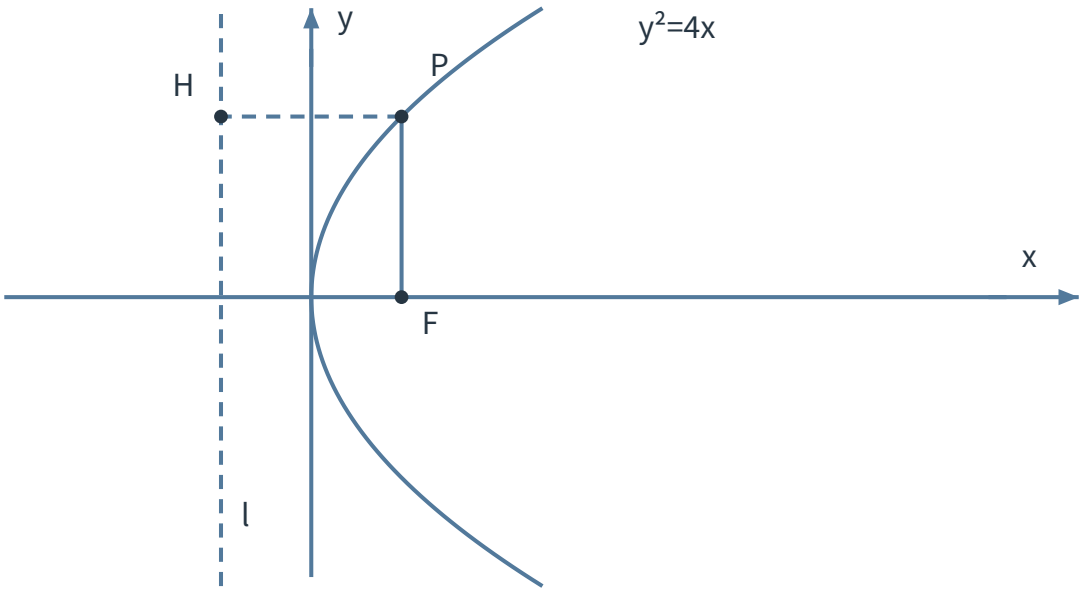

図 1　焦点 F と準線 l から等距離にある点 P

1. 放物線を生む距離の条件

焦点と準線

定点 F と、F を通らない定直線 l がある。F までの距離と l までの距離が等しい点 P の軌跡を放物線という。F を焦点、l を準線という。
点 P から l へ下ろした垂線の足を H とすれば、条件は $PF = PH$ である。直線までの距離は、斜めの線分ではなく垂線の長さで測る。

頂点と軸が見える理由

焦点 $F(1,0)$ は x 軸上にあり、準線 $l : x = -1$ は x 軸に垂直である。この配置は x 軸について反転しても変わらないので、軌跡も x 軸について対称になる。この対称の軸を放物線の軸という。
準線と軸の交点を $Q(-1,0)$ とすると、軸上で F と準線から等距離にある点は線分 FQ の中点である原点 O である。ここが放物線の頂点になる。

©ミライコーチング

2. 距離条件から基本形を導く

$y^2 = 4px$ の導出

$p \neq 0$ とし、焦点を $F(p, 0)$、準線を $l : x = -p$ とする。放物線上の点を $P(x, y)$ とすれば、焦点までの距離と準線までの距離は

$$PF = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}, \qquad d(P, l) = |\, x + p \,|$$

である。$PF = d(P, l)$ の両辺を二乗すると、

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2,$$

$$y^2 = 4px$$

を得る。PF と $d(P, l)$ はともに 0 以上なので、二乗後の式は元の等距離条件と同値である。また $y^2 = 4px$ より $px \geq 0$ だから、$p > 0$ なら $x \geq 0$、$p < 0$ なら $x \leq 0$ となり、開く向きも分かる。

横に開く放物線

$p \neq 0$ のとき、放物線 $y^2 = 4px$ の頂点は原点、焦点は $F(p, 0)$、準線は $x = -p$、軸は x 軸である。$p > 0$ なら右へ、$p < 0$ なら左へ開く。

例題 1：焦点と準線を求める

放物線 $y^2 = 12x$ の焦点と準線を求め、開く向きを答えよ。

例題 1 の解答・解説

$y^2 = 4px$ と比べると $4p = 12$ だから $p = 3$ である。したがって、焦点は $(3, 0)$、準線は $x = -3$ である。$p > 0$ なので右へ開く。

例題 2：定義から方程式を求める

焦点が $F(-2, 0)$、準線が $x = 2$ である放物線の方程式を求めよ。

例題 2 の解答・解説

焦点 $(p, 0)$ と準線 $x = -p$ を比べると $p = -2$ である。よって $y^2 = 4px$ に代入して、方程式は $y^2 = -8x$ である。負の x 方向へ開く。

3. 縦に開く放物線

役割を入れ替える

焦点を $F(0, p)$、準線を $l : y = -p$ とすると、点 $P(x, y)$ に対する等距離条件は

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = |\, y + p \,|$$

である。両辺を二乗して整理すれば $x^2 = 4py$ を得る。横向きの式と比べると、x と y の役割が入れ替わっている。

©ミライコーチング

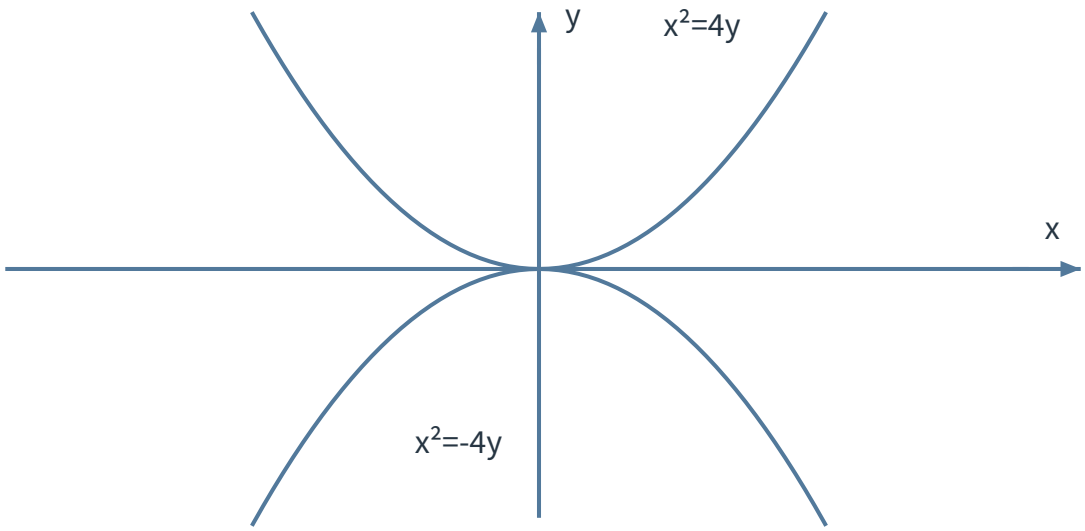

図 2　p の符号と放物線の開く向き

縦に開く放物線

$p \neq 0$ のとき、放物線 $x^2 = 4py$ の頂点は原点、焦点は $F(0, p)$、準線は $y = -p$、軸は y 軸である。$p > 0$ なら上へ、$p < 0$ なら下へ開く。

二乗されている文字を先に見る

$y^2 = 4px$ では y が二乗され、x が一次なので、軸は x 軸である。$x^2 = 4py$ では x が二乗され、y が一次なので、軸は y 軸である。そのうえで一次の文字の係数の符号を調べれば、開く向きが決まる。

基本形	焦点	準線	開く向き
$y^2 = 4px$	$(p, 0)$	$x = -p$	$p > 0$ で右、$p < 0$ で左
$x^2 = 4py$	$(0, p)$	$y = -p$	$p > 0$ で上、$p < 0$ で下

例題 3：縦向きの放物線

放物線 $x^2 = -20y$ の焦点と準線を求め、開く向きを答えよ。

例題 3 の解答・解説

$x^2 = 4py$ と比べると $4p = -20$ だから $p = -5$ である。焦点は $(0, -5)$、準線は $y = 5$ である。$p < 0$ なので下へ開く。

4. 演習問題

演習 1：基本形を読み取る

次の放物線について、焦点、準線、軸、開く向きをそれぞれ答えよ。
(1) $y^2 = 16x$
(2) $y^2 = -6x$
(3) $x^2 = 24y$
(4) $x^2 = -12y$

演習 2：焦点と準線から方程式を作る

次の焦点と準線をもつ放物線の方程式を求めよ。
(1) 焦点 $F(5, 0)$、準線 $x = -5$
(2) 焦点 $F(0, -3)$、準線 $y = 3$

演習 3：距離を確かめる

放物線 $y^2 = 8x$ 上の点 $P(2, 4)$ について、焦点 F までの距離と準線 l までの距離をそれぞれ求め、等しいことを確かめよ。

演習 4：未知の係数を決める

放物線 $y^2 = 4px$ が点 $(4, -8)$ を通るとき、p の値、焦点、準線を求めよ。

演習 5：対称な点を確かめる

放物線 $y^2 = 8x$ 上に点 $A(2, 4)$ がある。x 軸について A と対称な点 B の座標を求め、B もこの放物線上にあることを確かめよ。

5. 演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

小問	p	焦点	準線	軸・開く向き
(1)	4	$(4, 0)$	$x = -4$	x 軸・右
(2)	$-\frac{3}{2}$	$\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$	$x = \frac{3}{2}$	x 軸・左
(3)	6	$(0, 6)$	$y = -6$	y 軸・上
(4)	-3	$(0, -3)$	$y = 3$	y 軸・下

演習 2 の解答・解説

(1) 焦点 $(p, 0) = (5, 0)$ より $p = 5$ である。したがって $y^2 = 20x$ である。
(2) 焦点 $(0, p) = (0, -3)$ より $p = -3$ である。したがって $x^2 = -12y$ である。

演習 3 の解答・解説

$y^2 = 8x$ では $4p = 8$ より $p = 2$ だから、焦点は $F(2, 0)$、準線は $l : x = -2$ である。
$PF = \sqrt{(2-2)^2 + (4-0)^2} = 4$ である。また、$P(2, 4)$ から $x = -2$ までの距離は $|\, 2 - (-2) \,| = 4$ である。よって $PF = d(P, l)$ が成り立つ。

演習 4 の解答・解説

点 $(4, -8)$ を $y^2 = 4px$ に代入すると $64 = 16p$ なので $p = 4$ である。したがって、焦点は $(4, 0)$、準線は $x = -4$ である。

演習 5 の解答・解説

x 軸について対称な点は $B(2, -4)$ である。代入すると $(-4)^2 = 16$、$8 \cdot 2 = 16$ で等しいため、B も放物線上にある。y を $-y$ に替えても y^2 は変わらず、放物線は x 軸について対称である。

©ミライコーチング