

第 74 講 二進法と数の表し方

学習目標

- ・ 位取り記数法では、同じ数字でも桁によって表す大きさが変わることを説明できる。
- ・ 十進法と二進法の違いを、使用する数字と各桁の重みから説明できる。
- ・ 二進数を各桁の重みに分けて十進数へ直せる。
- ・ 十進数を 2 で割った余りを利用して二進数へ直せる。
- ・ 二進数と十進数を区別して正しく表記できる。

数の表し方には仕組みがある

同じ数字でも桁によって大きさが変わる

十進法で表された数 352 を考える。

この数では、

- ・ 左の 3 は 300
- ・ 中央の 5 は 50
- ・ 右の 2 は 2

を表している。

つまり、

$$352 = 3 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 2$$

である。

さらに、

$$100 = 10^2$$

$$10 = 10^1$$

$$1 = 10^0$$

なので、

$$352 = 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$$

と表せる。

このように、数字が置かれた位置によってその重みが決まる数の表し方を位取り記数法という。

位取り記数法

数字を置く位置によって、その数字が表す大きさを決める数の表し方を位取り記数法という。各桁には基準となる数の累乗が重みとして割り当てられる。

桁には重みがある

十進法では、右端から順に各桁の重みが、

$$10^0, 10^1, 10^2, 10^3, \dots$$

となる。

数字にその桁の重みを掛けて足すことで、数全体の値が決まる。

十進法

十進法

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 の 10 個の数字を使い、10 個集まるごとに 1 つ上の桁へ進む数の表し方を**十進法**という。

十進数の各桁

十進数 407 は、

$$407 = 4 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

と表せる。

十の位が 0 であっても、その桁が存在しないわけではない。

0 は「その重みの分を使っていない」ことを表している。

二進法

二進法

0 と 1 の 2 個の数字だけを使い、2 個集まるごとに 1 つ上の桁へ進む数の表し方を**二進法**という。
二進法で表された数を**二進数**という。

二進法では桁の重みが 2 の累乗になる

二進法では、右端から順に各桁の重みが、

$$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \dots$$

となる。

したがって、二進数 1011_2 は、

$$1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

という意味である。

計算すると、

$$8 + 0 + 2 + 1 = 11$$

である。

したがって、

$$1011_2 = 11$$

である。

二進法の各桁の重み

二進数の右端から順に、

桁	重み
右端	$2^0 = 1$
右から 2 桁目	$2^1 = 2$
右から 3 桁目	$2^2 = 4$
右から 4 桁目	$2^3 = 8$
右から 5 桁目	$2^4 = 16$

となる。

必要な桁だけ、この表を右へ広げて考えればよい。

二進数では 2 以上の数字を使わない

二進法で使える数字は 0 と 1 だけである。

したがって、

$$102_2$$

のように数字 2 を含む表記は二進数として正しくない。

二進数を十進数へ直す

各桁の重みを掛けて足す

二進数 1101_2 を十進数へ直す。

右端から各桁の重みを対応させると、

二進数の桁	重み	値
1	$2^3 = 8$	8
1	$2^2 = 4$	4
0	$2^1 = 2$	0
1	$2^0 = 1$	1

したがって、

$$1101_2 = 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1$$

である。

よって、

$$1101_2 = 13$$

である。

二進数から十進数への手順

1. 右端を 2^0 とする。
2. 左へ進むごとに $2^1, 2^2, 2^3, \dots$ と重みを付ける。
3. 各桁の数字と重みを掛ける。
4. すべて足す。

0 の桁は計算結果に加わらないため、1 が立っている桁の重みだけを足してもよい。

0 の桁を正しく読む

10010₂ を読む

二進数 10010₂ を考える。

各桁は、

$$1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

を表す。

したがって、

$$10010_2 = 16 + 2 = 18$$

である。

途中に 0 がある場合でも、その桁を飛ばして位置をずらしてはいけない。

桁の位置を詰めない

10010₂ にある 0 は、桁の位置を保つために必要である。

0 を無視して 11₂ のように読んではならない。

数字 0 は値を加えないが、桁の位置を示している。

十進数を二進数へ直す考え方

2 の累乗の和として考える

十進数 13 を二進数へ直す。

13 は、

$$13 = 8 + 4 + 1$$

と表せる。

これは、

$$13 = 2^3 + 2^2 + 2^0$$

である。

2¹ は使っていないので、その桁を 0 とする。

したがって、

$$13 = 1101_2$$

である。

小さい数なら 2 の累乗を組み合わせてもよい

十進数を、

$$1, 2, 4, 8, 16, \dots$$

という 2 の累乗の和として表す方法でも、二進数へ変換できる。

使う重みの桁を 1、使わない重みの桁を 0 とする。

2 で割った余りを使う

十進数を機械的に二進数へ直す

十進数 22 を二進数へ直す。

22 を 2 で割り、商と余りを求める。

$$22 = 2 \cdot 11 + 0$$

次に 11 を 2 で割る。

$$11 = 2 \cdot 5 + 1$$

さらに、

$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$

$$2 = 2 \cdot 1 + 0$$

$$1 = 2 \cdot 0 + 1$$

となる。

得られた余りを**最後から逆向きに並べると**、

$$10110$$

となる。

したがって、

$$22 = 10110_2$$

である。

十進数から二進数への割り算手順

正の十進数を二進数へ直すときは、次のように進める。

1. 2 で割り、余りを記録する。
 2. 得られた商を再び 2 で割る。
 3. 商が 0 になるまで繰り返す。
 4. 余りを下から上へ、つまり最後に得た余りから逆順に読む。
- 余りは必ず 0 または 1 になる。

余りは計算した順に読まない

22 の例で余りを上から読むと、

$$01101$$

となり、正しい二進数にはならない。

余りは、最後に得たものから逆順に読む必要がある。

変換したら元に戻して確認する

10110₂ を十進数へ戻す

22 = 10110₂ が正しいか確認する。

$$10110_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

なので、

$$10110_2 = 16 + 4 + 2 = 22$$

となる。

元の十進数と一致したので、変換が正しいと確認できる。

変換は往復して確認できる

- ・ 二進数から十進数へ直すときは、各桁の重みを足す。
 - ・ 十進数から二進数へ直すときは、2 で割った余りを逆順に読む。
- 変換後に逆向きの計算を行えば、答えを確認できる。

表記を区別する

同じ数字列でも意味が違う

数字列 101 を考える。

十進数としての 101 は、そのまま百一を表す。

一方、

$$101_2$$

は二進数なので、

$$1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = 5$$

を表す。

このように、同じ数字列でも何進法で表したかによって値が変わる。

二進数には下付きの 2 を付ける

二進数と十進数を区別する必要があるときは、

$$1011_2$$

のように下付きの 2 を付ける。

この講では、下付きの 2 がない通常の整数表記は十進数として扱う。

例題

例題 1

二進数 10101_2 を十進数に直せ。

例題 1 の解答・解説

各桁の重みを考えると、

$$10101_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

である。

したがって、

$$10101_2 = 16 + 4 + 1 = 21$$

である。

例題 2

十進数 19 を二進数に直せ。

例題 2 の解答・解説

19 を 2 で順に割る。

$$19 = 2 \cdot 9 + 1$$

$$9 = 2 \cdot 4 + 1$$

$$4 = 2 \cdot 2 + 0$$

$$2 = 2 \cdot 1 + 0$$

$$1 = 2 \cdot 0 + 1$$

余りを最後から逆順に読むと、

$$10011$$

となる。

したがって、

$$19 = 10011_2$$

である。

例題 3

二進数 11100_2 を十進数に直し、その十進数を 2 で割る方法でもとの二進数へ戻せ。

例題 3 の解答・解説

まず十進数へ直す。

$$11100_2 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2$$

なので、

$$11100_2 = 16 + 8 + 4 = 28$$

である。

次に 28 を 2 で順に割る。

$$28 = 2 \cdot 14 + 0$$

$$14 = 2 \cdot 7 + 0$$

$$7 = 2 \cdot 3 + 1$$

$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$

$$1 = 2 \cdot 0 + 1$$

余りを逆順に読むと、

$$11100$$

となる。

したがって、

$$28 = 11100_2$$

であり、もとの二進数に戻る。

演習問題

練習問題 1

二進数 101_2 を十進数に直せ。

練習問題 2

二進数 1001_2 を十進数に直せ。

練習問題 3

二進数 11010_2 を十進数に直せ。

練習問題 4

十進数 10 を二進数に直せ。

練習問題 5

十進数 17 を二進数に直せ。

練習問題 6

十進数 25 を二進数に直せ。

練習問題 7

次の表の空欄を埋めよ。

二進数	十進数
1_2	
10_2	
100_2	
1000_2	
10000_2	

練習問題 8

ある生徒は 10110_2 を、

$$1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2$$

と計算した。

誤りを説明し、 10110_2 を正しく十進数に直せ。

練習問題 9

ある生徒は十進数 14 を 2 で順に割り、余りを計算した結果、

$$0, 1, 1, 1$$

を得た。

この余りから二進数を作るときの読み方を説明し、14 を二進数に直せ。

演習問題の解答・解説

練習問題 1 の解答・解説

$$101_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

である。

したがって、

$$101_2 = 4 + 1 = 5$$

である。

練習問題 2 の解答・解説

$$1001_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

である。

したがって、

$$1001_2 = 8 + 1 = 9$$

である。

練習問題 3 の解答・解説

$$11010_2 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

である。

したがって、

$$11010_2 = 16 + 8 + 2 = 26$$

である。

練習問題 4 の解答・解説

10 を 2 で順に割る。

$$10 = 2 \cdot 5 + 0$$

$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$

$$2 = 2 \cdot 1 + 0$$

$$1 = 2 \cdot 0 + 1$$

余りを逆順に読むと、

$$1010$$

となる。

したがって、

$$10 = 1010_2$$

である。

練習問題 5 の解答・解説

17 を 2 で順に割る。

$$17 = 2 \cdot 8 + 1$$

$$8 = 2 \cdot 4 + 0$$

$$4 = 2 \cdot 2 + 0$$

$$2 = 2 \cdot 1 + 0$$

$$1 = 2 \cdot 0 + 1$$

余りを逆順に読むと、

$$10001$$

となる。

したがって、

$$17 = 10001_2$$

である。

練習問題 6 の解答・解説

25 を 2 で順に割る。

$$25 = 2 \cdot 12 + 1$$

$$12 = 2 \cdot 6 + 0$$

$$6 = 2 \cdot 3 + 0$$

$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$

$$1 = 2 \cdot 0 + 1$$

余りを逆順に読むと、

$$11001$$

となる。

したがって、

$$25 = 11001_2$$

である。

練習問題 7 の解答・解説

二進数で 1 の左に 0 を 1 つ増やすごとに、桁の重みは 2 倍になる。

したがって、表は次のようになる。

二進数	十進数
1_2	1
10_2	2
100_2	4
1000_2	8
10000_2	16

練習問題 8 の解答・解説

10110_2 の各桁は、左から、

$$1, 0, 1, 1, 0$$

である。

生徒の計算では、0 の桁を無視した結果、残りの 1 の位置までずらしている。

正しくは、

$$10110_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

である。

したがって、

$$10110_2 = 16 + 4 + 2 = 22$$

である。

練習問題 9 の解答・解説

2 で割って得た余りは、計算した順ではなく、最後に得た余りから逆順に読む。
余りが、

$$0, 1, 1, 1$$

の順に得られたので、逆順にすると、

$$1110$$

である。

したがって、

$$14 = 1110_2$$

である。

確認すると、

$$1110_2 = 8 + 4 + 2 = 14$$

となる。