

第 143 講 和の記号 Σ

学習目標

この講では、有限個の和を簡潔に表す記号 Σ の意味を理解し、次のことができるようになる。

- Σ の各部分が表す意味を説明できる。
- Σ の式を具体的な和へ展開できる。
- 展開された和を Σ を使った式へ書き直せる。
- 和の性質を利用して、複雑な和を計算しやすい形へ変形できる。

概念説明

数列の和では、同じ形の項が多く並ぶことがある。そのようなとき、和を短く表すために Σ を使う。ただし、 Σ は等差数列や等比数列のように特定の規則を持つ項だけに使う記号ではない。指定された範囲の添字に対して、それぞれ決められた被加数を有限個足し合わせることを表す記号である。例えば、

$$\sum_{k=2}^5 (2k - 1)$$

では、添字 k を選び、その値を被加数 $2k - 1$ に代入し、得られた値を足す。

添字 k	被加数 $2k - 1$
2	3
3	5
4	7
5	9

この場合、添字は 2, 3, 4, 5 の 4 つの値をとる。そのため項数は 4 個であり、最後の添字は 5、最後の項は 9 である。すべてを足した結果は 24 という 1 つの値になる。

Σ では、「添字を範囲内で動かす」「その都度被加数を決める」「得られた値を足す」という流れを見ることが重要である。

和の記号 Σ の定義

この講では、 m, n を正整数とし、 $m \leq n$ を満たすものとする。また、 a_k は $m \leq k \leq n$ のすべての整数 k に対して定義された実数であるとする。

このとき、

$$\sum_{k=m}^n a_k$$

を、 a_m から a_n までの $n - m + 1$ 個の値を、それぞれ 1 回ずつ足すものと定義する。

ここで、

- k は添字であり、どの項を選ぶかを表す。
- m は下端であり、添字を動かし始める値を表す。
- n は上端であり、添字を止める値を表す。
- a_k は被加数であり、実際に足す項を表す。

項数は両端を含めて数えるので、 $n - m + 1$ 個である。

例えば、 $m = n$ のときは 1 つの値だけを足すため、

$$\sum_{k=m}^m a_k = a_m$$

となる。

また、 $n = m + 1$ のときは 2 項の和となり、

$$\sum_{k=m}^{m+1} a_k = a_m + a_{m+1}$$

となる。

この講では、空和や無限和は扱わない。

必要な注意・使い方

Σ を読むときは、上端、末項、項数を区別する必要がある。

例えば、

$$\sum_{k=2}^5 (k+1)$$

では、上端は 5 であるが、最後の項は $k = 5$ を代入した 6 である。また、項数は $5 - 2 + 1 = 4$ 個であり、5 項ではない。

具体的な有限和は、展開した後に 1 つの値になる。

$$\sum_{k=3}^6 k = 3 + 4 + 5 + 6 = 18$$

添字の名前を変更するときは、下端や被加数の中の同じ文字を一貫して変更する必要がある。

例えば、

$$\sum_{k=1}^4 k = \sum_{j=1}^4 j$$

は同じ意味である。

一方で、

$$\sum_{k=1}^n k$$

の添字 k だけを勝手に n に変えて、

$$\sum_{n=1}^n n$$

とすることはできない。上端として使っている n と添字を混同すると、範囲の意味が変わってしまう。

添字の文字は変更できるが、式の中で果たしている役割を保ったまま変更することが重要である。

和の性質

m, n は正整数で $m \leq n$ 、各項は $m \leq k \leq n$ の範囲ですべて実数として定義されているとする。また、 c は k に依存しない定数とする。

有限個の足し算では、交換法則・結合法則・分配法則が成り立つ。そのため、 Σ の和も各項を展開した普通の足し算として考えることで、次の性質が得られる。

和は分けられる。

$$\sum_{k=m}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n b_k$$

差も同様に分けられる。

$$\sum_{k=m}^n (a_k - b_k) = \sum_{k=m}^n a_k - \sum_{k=m}^n b_k$$

定数は外へ出せる。

$$\sum_{k=m}^n ca_k = c \sum_{k=m}^n a_k$$

定数だけを足す場合は、項数だけ同じ値を足すことになる。

$$\sum_{k=m}^n c = (n - m + 1)c$$

例えば 2 項だけの場合、 $(a_m + b_m) + (a_{m+1} + b_{m+1})$ は、足し方を変えると、 $(a_m + a_{m+1}) + (b_m + b_{m+1})$ となる。このような各項の対応が一般の場合でも続くため、和の分離が成立する。

また、 $m = n$ の 1 項だけの場合も同じ性質が成立する。

例題 1

次の和を展開して計算せよ。

$$\sum_{k=2}^5 (2k - 1)$$

例題 1 の解答・解説

添字 k を下端の 2 から上端の 5 まで 1 ずつ動かす。

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^5 (2k - 1) &= (2 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 3 - 1) + (2 \cdot 4 - 1) + (2 \cdot 5 - 1) \\ &= 3 + 5 + 7 + 9 \\ &= 24 \end{aligned}$$

したがって、求める和は 24 である。

注意すべき点は、上端の 5 をそのまま最後の項にしないことである。最後の項は $k = 5$ を代入した 9 になる。

例題 2

次の和を Σ を使って表せ。

$$4 + 7 + 10 + 13 + 16$$

例題 2 の解答・解説

各項を見ると、3 ずつ増えている。

先頭の 4 は、添字を $k = 1$ としたときに $3k + 1$ と表せる。

実際に、

$$k = 1 : 3 \cdot 1 + 1 = 4$$

$$k = 2 : 3 \cdot 2 + 1 = 7$$

$$k = 3 : 3 \cdot 3 + 1 = 10$$

$$k = 4 : 3 \cdot 4 + 1 = 13$$

$$k = 5 : 3 \cdot 5 + 1 = 16$$

である。

したがって、

$$4 + 7 + 10 + 13 + 16 = \sum_{k=1}^5 (3k + 1)$$

となる。

例題 3

次の和を計算せよ。

$$\sum_{k=1}^4 (2k + 3)$$

例題 3 の解答・解説

各項を直接展開して計算する。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^4 (2k+3) &= (2 \cdot 1 + 3) + (2 \cdot 2 + 3) + (2 \cdot 3 + 3) + (2 \cdot 4 + 3) \\ &= 5 + 7 + 9 + 11 \\ &= 32\end{aligned}$$

また、和の性質を使うと、

$$\sum_{k=1}^4 (2k+3) = \sum_{k=1}^4 2k + \sum_{k=1}^4 3$$

となる。

ここで、定数倍の性質と定数の和を用いる。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^4 2k + \sum_{k=1}^4 3 &= 2(1+2+3+4) + (3+3+3+3) \\ &= 20 + 12 \\ &= 32\end{aligned}$$

直接展開する方法と、和の性質を使って分ける方法は異なるが、どちらも同じ値になる。

演習問題

練習問題 1

次の和を展開して計算せよ。

$$\sum_{k=3}^6 k$$

練習問題 2

次の和を展開して計算せよ。

$$\sum_{j=2}^5 (j^2 - 1)$$

ただし、この講では平方和の一般公式は用いない。

練習問題 3

次の和を Σ を使って表せ。

$$5 + 8 + 11 + 14 + 17$$

練習問題 4

次の和を Σ を使って表せ。

$$6 + 6 + 6 + 6$$

練習問題 5

次の和を計算せよ。

$$\sum_{k=4}^4 (3k - 2)$$

練習問題 6

次の和を計算せよ。

$$\sum_{n=1}^5 (-2n + 3)$$

練習問題 7

次の 2 つの式が等しい理由を説明し、値を求めよ。

$$\sum_{k=1}^4 (k + 2)$$

$$\sum_{k=1}^4 k + \sum_{k=1}^4 2$$

練習問題 8

次の式について、誤った説明を指摘し、正しく直せ。

$$\sum_{k=2}^5 (k + 1)$$

ある学習者が次のように説明した。

「この和は上端が 5 なので、最後の項は 5 であり、5 項の和である。」

この説明の誤りを指摘し、正しい説明に直せ。

練習問題 1 の解答・解説

添字 k を下端の 3 から上端の 6 まで 1 ずつ動かす。

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^6 k &= 3 + 4 + 5 + 6 \\ &= 18\end{aligned}$$

下端が 3、上端が 6 なので、項数は $6 - 3 + 1 = 4$ 個である。
上端の 6 は項数ではなく、最後に代入する添字の値を表している。

練習問題 2 の解答・解説

添字 j を 2 から 5 まで動かす。

$$\begin{aligned}\sum_{j=2}^5 (j^2 - 1) &= (2^2 - 1) + (3^2 - 1) + (4^2 - 1) + (5^2 - 1) \\ &= 3 + 8 + 15 + 24 \\ &= 50\end{aligned}$$

この問題では 4 項だけを直接計算している。平方和の一般公式は必要なく、有限個の和を展開する考え方を使う。

練習問題 3 の解答・解説

各項は 3 ずつ増えている。

添字を $k = 1, 2, 3, 4, 5$ とすると、一般の項は $3k + 2$ になる。

確認すると、

$$\begin{aligned}k = 1 : 3 \cdot 1 + 2 &= 5 \\ k = 2 : 3 \cdot 2 + 2 &= 8 \\ k = 3 : 3 \cdot 3 + 2 &= 11 \\ k = 4 : 3 \cdot 4 + 2 &= 14 \\ k = 5 : 3 \cdot 5 + 2 &= 17\end{aligned}$$

したがって、

$$5 + 8 + 11 + 14 + 17 = \sum_{k=1}^5 (3k + 2)$$

である。

練習問題 4 の解答・解説

同じ値 6 を 4 回足している。

したがって、添字を $k = 1$ から 4 まで動かし、被加数を常に 6 とすればよい。

$$6 + 6 + 6 + 6 = \sum_{k=1}^4 6$$

また、

$$\sum_{k=1}^4 6 = 6 + 6 + 6 + 6 = 24$$

である。

定数の和では、定数を足す回数が項数になる。

練習問題 5 の解答・解説

下端と上端が同じ場合は、添字が 1 つの値だけをとる。

$$\sum_{k=4}^4 (3k - 2)$$

では、 $k = 4$ の 1 項だけである。

$$\begin{aligned} \sum_{k=4}^4 (3k - 2) &= 3 \cdot 4 - 2 \\ &= 10 \end{aligned}$$

したがって、値は 10 である。

1 項の和も有限和として含まれる。

練習問題 6 の解答・解説

添字 n を 1 から 5 まで動かす。

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^5 (-2n + 3) &= (-2 \cdot 1 + 3) + (-2 \cdot 2 + 3) + (-2 \cdot 3 + 3) \\ &\quad + (-2 \cdot 4 + 3) + (-2 \cdot 5 + 3) \\ &= 1 + (-1) + (-3) + (-5) + (-7) \\ &= -15 \end{aligned}$$

正負を含む和でも、各添字の値を順に代入して足せばよい。

項数は $5 - 1 + 1 = 5$ 個であり、負の項が含まれることに注意する。

練習問題 7 の解答・解説

左辺を展開する。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^4 (k+2) &= (1+2) + (2+2) + (3+2) + (4+2) \\ &= 3 + 4 + 5 + 6 \\ &= 18\end{aligned}$$

一方、右辺は、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^4 k + \sum_{k=1}^4 2 &= (1+2+3+4) + (2+2+2+2) \\ &= 10 + 8 \\ &= 18\end{aligned}$$

となる。

これは、各項の中の足し算を別々に集めているためである。

$$\sum_{k=1}^4 (k+2) = \sum_{k=1}^4 k + \sum_{k=1}^4 2$$

は、和の性質によって成立する。

練習問題 8 の解答・解説

説明の誤りは 2 点ある。

1 つ目は、最後の項を 5 としている点である。

$$\sum_{k=2}^5 (k+1)$$

では、最後の項は上端 $k=5$ を代入した値である。

$5+1=6$ となる。

2 つ目は、項数を 5 個としている点である。

添字は 2, 3, 4, 5 の 4 つの値をとるので、 $5-2+1=4$ 項である。

正しく展開すると、

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^5 (k+1) &= (2+1) + (3+1) + (4+1) + (5+1) \\ &= 3 + 4 + 5 + 6 \\ &= 18\end{aligned}$$

となる。

上端は最後の添字の値であり、末項の値や項数そのものではない。