第 022 講 圧力と水の深さ

この講でできるようになること

- 圧力を面積あたりの力として説明し、力・面積・圧力の関係を判断できる。
- 質量と体積から密度を求め、圧力の計算に必要な単位へ換算できる。
- 静止した水の圧力を、液面の圧力と深さによる増分に分けて計算できる。
- 液体の深さ、面に働く力、容器の形状を区別し、圧力の大小を理由とともに説明できる。

1. 圧力は力を面積で分けて考える量

同じ力でも、押す面積によって違いが生まれる

手のひらで机を押す場合と、指先で机を押す場合を考える。同じ大きさの力でも、指先のように狭い面積へ力が集中すると、押された部分への作用は大きくなる。

この違いを表す量が**圧力**である。圧力は力そのものではなく、面積あたりにどれだけの力が働いているかを表す。

圧力

面に垂直に働く押す力の大きさを $F_{\perp}$、その力を受ける面積を S とすると、圧力 p は

$$p = \frac{F_{\perp}}{S}$$

で定義される。

- p：圧力（単位 Pa）
- $F_{\perp}$：面に垂直に働く押す力の大きさ（単位 N）
- S：力を受ける面積（単位 m^2）

圧力の単位 Pa（パスカル）は、

$$1\,\mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{N/m^2}$$

と定義される。

圧力の式で用いるのは、面を垂直に押す力である。斜めに力が働く場合、力の大きさをそのまま面積で割るわけではない。本講では、面に垂直に力を加える場合を中心に扱う。

圧力が面全体で一様なら、式を変形して

$$F_{\perp} = pS$$

と表せる。つまり、圧力と面積から、その面が受ける力を求められる。

©ミライコーチング

力と面積のどちらを変えるか

同じ大きさの力を広い面積へ分散させると、圧力は小さくなる。一方、同じ圧力が働いているなら、面積が広いほど受ける力の合計は大きい。

比較条件	面積	面に垂直な力	圧力
狭い面	$20\,\mathrm{cm}^2$	$60\,\mathrm{N}$	$30000\,\mathrm{Pa}$
広い面	$40\,\mathrm{cm}^2$	$60\,\mathrm{N}$	$15000\,\mathrm{Pa}$

この比較では、押す力を $60\,\mathrm{N}$ にそろえている。面積を 2 倍にすると、圧力は半分になる。

判断のポイント

力を同じにして面積を比べるのか、圧力を同じにして力を比べるのかを最初に決める。

- 力が一定なら、面積が大きいほど圧力は小さい。
- 圧力が一定なら、面積が大きいほど受ける力は大きい。

圧力と力は異なる物理量であり、単位も異なる。

面積の単位は二乗で換算する

圧力を Pa で求めるときは、面積を m^2 にそろえる。

長さの換算では、

$$1\,\mathrm{cm} = 0.01\,\mathrm{m}$$

である。

しかし、面積は縦と横の長さを掛けた量であるため、換算係数も二乗する。

$$\begin{aligned} 1\,\mathrm{cm}^2 &= (0.01\,\mathrm{m})^2 \\ &= 0.0001\,\mathrm{m}^2 \end{aligned}$$

したがって、

$$20\,\mathrm{cm}^2 = 0.0020\,\mathrm{m}^2$$

となる。

$1\,\mathrm{cm}$ が $0.01\,\mathrm{m}$ だからといって、$1\,\mathrm{cm}^2$ を $0.01\,\mathrm{m}^2$ としてはいけない。

2. 密度は同じ体積にどれだけの質量があるかを表す

水の圧力を考える前に、液体の単位体積あたりの質量を表す**密度**を導入する。

同じ体積の容器に水と別の液体を入れても、質量が同じとは限らない。同じ体積あたりにどれだけの質量が含まれるかを表す量が密度である。

密度

物質の質量を m、体積を V とすると、密度 ρ（ロー）は

$$\rho = \frac{m}{V}$$

で定義される。

- ρ：密度（単位 $\mathrm{kg/m^3}$）
- m：質量（単位 kg）
- V：体積（単位 $\mathrm{m^3}$）

同じ密度の物質では、体積が大きいほど質量も大きい。

この式を変形すると、

$$m = \rho V$$

となる。密度が分かれば、物質の体積から質量を求められる。

本講では、液体の密度が場所によらず一定である場合を考える。このような液体を一様密度の液体として扱う。

水の密度と単位換算

以下の計算では、水の密度を

$$\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$$

とする。これは計算用の設定値である。

密度には $\mathrm{g/cm^3}$ が使われることもある。長さの換算から、

$$\begin{aligned} 1\,\mathrm{cm^3} &= (0.01\,\mathrm{m})^3 \\ &= 0.000001\,\mathrm{m^3} \end{aligned}$$

となる。また、

$$1\,\mathrm{g} = 0.001\,\mathrm{kg}$$

であるから、

$$\begin{aligned} 1\,\mathrm{g/cm^3} &= \frac{0.001\,\mathrm{kg}}{0.000001\,\mathrm{m^3}} \\ &= 1000\,\mathrm{kg/m^3} \end{aligned}$$

が成り立つ。

ここで、単位記号 g はグラムを表す。一方、後で使う斜体の g は重力加速度を表す記号であり、意味が異なる。

3. 水の中では深いほど圧力が大きい

深さは液面から鉛直下向きに測る

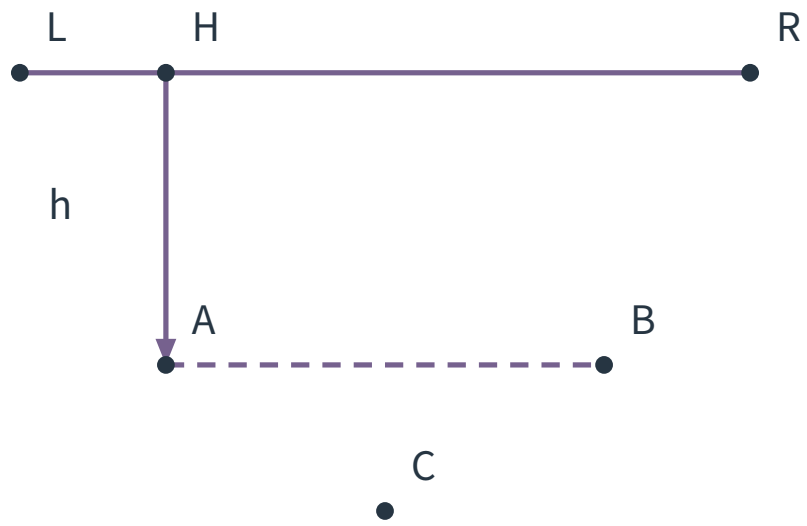
水の中へ潜ると、水面近くより深い場所の方が強く押される。この違いを説明するには、水の量全体ではなく、調べる位置の**液面からの深さ**に注目する。

本講では、次の条件を満たす液体を考える。

- 液体は静止している。
- 液体の密度 ρ は一定である。
- 重力加速度 g は一定で、鉛直下向きである。
- 液面は水平で、その液面に働く圧力は一様である。

深さ h は、液面から調べる点までの**鉛直下向きの距離**と定める。容器の底までの距離や、斜めに測った距離ではない。

次の模式図では、線分 LR が水平な液面、点 A と B が同じ深さの位置、点 C がそれより深い位置を表す。



液面上の点 H から A へ向かう矢印は、深さ h を示す補助矢印であり、力を表していない。破線 AB も深さを比較するための補助線である。

容器の壁と底は省略しており、図の座標や長さは実際の距離を表さない。

同じ液体が静止し、同じ液面圧力を受けているなら、A と B の圧力は等しい。C は A や B より深いため、C の圧力の方が大きい。

液面の圧力と深さによる増分

液体の表面にも圧力が働いている。

例えば、水面が大気に接している開放容器では、水面に大気圧が働く。液面での圧力を p_0（ピーゼロ）とする。添字の 0 は液面を表す。

水中の深さ h での圧力を p とすると、静止した一様密度の液体では、液面より深くなることで圧力が増加する。

静止した液体の圧力

液面の圧力を p_0、液体の密度を ρ、重力加速度の大きさを g、液面から鉛直下向きに測った深さを h とすると、

$$p = p_0 + \rho g h$$

が成り立つ。

この式は、液体が静止し、密度と重力加速度が一定で、液面が水平かつ液面圧力が一様である場合の関係である。

h の位置での絶対圧は p、液面からの圧力の増分は

$$\Delta p = p - p_0 = \rho g h$$

である。

この 2 つの式は、求める量が異なる。

求める量	意味	式
液面の圧力	水面ですでに働いている圧力	p_0
深さによる圧力の増分	液面から深くなることで増える圧力	$\Delta p = \rho g h$
深さ h での絶対圧	液面の圧力を含む圧力全体	$p = p_0 + \rho g h$

絶対圧は、圧力がゼロの状態を基準にして表した量である。一方、ある基準圧力との差を表す量を差圧という。特に大気圧を基準にした差圧はゲージ圧とも呼ばれる。

開放水面で p_0 が大気圧なら、$\rho g h$ はその大気圧に対する水中のゲージ圧に等しい。ただし、液面圧力が大気圧と異なる場合、$\rho g h$ はあくまで液面圧力からの増分である。

水圧という言葉だけで答えを決めない

「水圧を求めよ」という表現だけでは、絶対圧 p を指すのか、深さによる増分 $\rho g h$ を指すのかが曖昧になる場合がある。

問題文で基準が指定されているか確認し、**何に対する圧力なのか**を明確にしてから計算する。

4. なぜ深さに比例して圧力が増えるのか

水の一部分を取り出してつり合いを考える

深さによる圧力の増分は、水の重さと力のつり合いから説明できる。

静止した一様密度の水の中に、断面積 S、高さ h の鉛直な柱状領域を考える。これは水の一部分を仮想的に区切ったものであり、固体の柱を沈めたわけではない。

柱の上面を水平な液面、下面を深さ h の位置とする。

この水の領域に働く鉛直方向の力は、次の 3 つである。

- **上面からの力**：液面の圧力による下向きの力 p_0S
- **重力**：柱状領域の水自身に働く下向きの力 W
- **下面からの力**：下側の水が押す上向きの力 pS

水は静止しているので、これらの力は鉛直方向につり合う。

水柱の側面にも周囲の水から圧力が働くが、側面が鉛直であるため、その力は水平方向であり、ここで考える鉛直方向の力には寄与しない。

水柱の重力を求める

柱状領域の体積は、断面積と高さの積である。

$$V = Sh$$

密度の定義から、水柱の質量は

$$m = \rho Sh$$

となる。

重力加速度の大きさを g とすると、水柱に働く重力の大きさは

$$W = mg = \rho Shg$$

である。

ここで、鉛直上向きを力の正方向とする。下面からの力は正、上面からの力と重力は負である。

鉛直方向のつり合いより、

$$pS - p_0S - \rho Shg = 0$$

が成り立つ。

これを整理すると、

$$pS = p_0S + \rho Shg$$

となる。断面積 S は正の量なので、両辺を S で割ると、

$$p = p_0 + \rho gh$$

が得られる。

水柱の断面積 S が消えることに注目したい。**同じ密度・重力加速度・液面圧力なら、圧力の増分は面積ではなく深さによって決まる**のである。

仮想液柱に働く力の具体例

導いた式を、次の別場面で確かめる。

静止した水について、条件を

- 液面からの深さ：$h = 10\,\mathrm{m}$
- 水柱の断面積：$S = 0.010\,\mathrm{m}^2$
- 密度：$\rho = 1000\,\mathrm{kg/m}^3$
- 重力加速度：$g = 10\,\mathrm{m/s}^2$
- 液面の絶対圧：$p_0 = 100000\,\mathrm{Pa}$

とする。

この場面は、後の基本例で扱う深さ $0.40\,\mathrm{m}$ の水とは別の計算例である。

水柱の体積は、

$$V = (0.010\,\mathrm{m}^2)(10\,\mathrm{m}) = 0.10\,\mathrm{m}^3$$

である。

質量は、

$$m = (1000\,\mathrm{kg/m}^3)(0.10\,\mathrm{m}^3) = 100\,\mathrm{kg}$$

となり、重力は、

$$W = (100\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s}^2) = 1000\,\mathrm{N}$$

となる。

上面の液面圧力による力の大きさは、

$$F_{\mathrm{top}} = (100000\,\mathrm{Pa})(0.010\,\mathrm{m}^2) = 1000\,\mathrm{N}$$

で、下向きである。

下面の絶対圧は、

$$\begin{aligned} p &= 100000\,\mathrm{Pa} \\ &\quad +(1000\,\mathrm{kg/m}^3)(10\,\mathrm{m/s}^2)(10\,\mathrm{m}) \\ &= 200000\,\mathrm{Pa} \end{aligned}$$

となる。

したがって、下面から受ける力は、

$$F_{\mathrm{bottom}} = (200000\,\mathrm{Pa})(0.010\,\mathrm{m}^2) = 2000\,\mathrm{N}$$

で、上向きである。

次の図は、仮想的に区切った水柱に働く鉛直方向の 3 つの力を表す。

©ミライコーチング

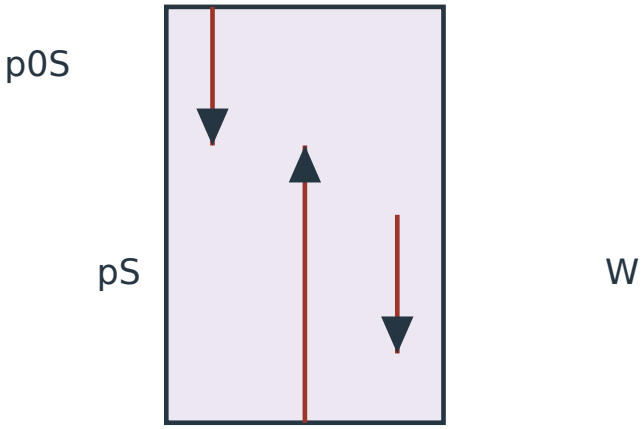


図 2　仮想液柱に働く鉛直方向の力。表示位置を横にずらして区別し、回転は扱わない

図の長方形は固体ではなく、水中の仮想的な液体領域を表す。上辺は液面、下辺は深さ 10 m の位置に対応する。

図中の p0S は p_0S、pS は pS を表し、W は重力である。3 つの力の矢印は共通の尺度で描かれており、1000 N を長さ 60 の描画単位、2000 N を長さ 120 の描画単位としている。水柱の長方形自体の寸法は模式的であり、実際の長さの縮尺ではない。

上面の力と重力はいずれも下向きであり、下面の力は上向きである。矢印を横方向にずらしてあるのは識別のためであり、作用位置を移したとして回転を論じる図ではない。力はそれぞれ対応する面や水柱の内部に作用する。

側面の圧力による水平方向の力は互いにつり合うため、鉛直方向の 3 力の図から省略している。

実際に鉛直方向の合力を計算すると、

$$2000\,\mathrm{N} - 1000\,\mathrm{N} - 1000\,\mathrm{N} = 0\,\mathrm{N}$$

となる。

このように、下側からの力が上面からの力より大きいのは、水柱自身の重力を支える必要があるためである。

©ミライコーチング

5. 深さで決まる圧力と、面積で決まる力

同じ深さなら同じ圧力

静止した一様密度の液体では、同じ液体・同じ液面圧力・同じ重力加速度という条件の下で、深さ h が等しければ圧力も等しい。

容器が細長い場合も、幅が広い場合も、同じ液面からの鉛直深さにある点では圧力が等しい。

液体の量が多い容器の方が、必ず圧力が大きくなるわけではない。

ただし、別々の容器で液面圧力 p_0 が異なれば、液体と深さが同じでも絶対圧は異なる。式のどの量を同じにして比較するかが重要である。

深さを比べるときの着眼点

比べる深さは、**それぞれの液面から鉛直下向きに測る**。

容器の底から測った高さや、液体全体の質量だけで圧力を判断しない。同じ液体・同じ液面圧力なら、同じ深さの圧力は等しい。

圧力は底面以外にも働く

静止した液体のある点での圧力は、面の向きによらず同じ大きさである。一方、その圧力によって液体が面に及ぼす力の向きは、面に垂直となる。

水平な底面には鉛直方向に、鉛直な側壁には水平方向に力が働く。

小さな平面に一様な圧力 p が働くとき、その片面が受ける力の大きさは

$$F = pS$$

で求められる。

一方、高さのある側壁では深さによって圧力が変わる。側壁全体を単一の深さの圧力で扱えるとは限らないため、本講では深さの範囲が大きな側壁全体の合力計算を扱わない。

また、容器の底が受ける圧力による力を、液体全体の重力と一般に同一視してはいけない。容器の形によっては、壁から液体に働く力にも鉛直成分があるためである。

片面の力と、両面の圧力差による力

水中の底板の片面には、水の絶対圧による力が働く。

ところが、その底板の反対側にも空気などから圧力が働いている場合、反対面の力も考えなければならない。

例えば、内側の絶対圧が p、外側の圧力が p_{out} で、両面に同じ面積 S で一様に圧力が働く水平な板では、圧力による合力の大きさは

$$F_{\mathrm{net}} = |\, p - p_{\mathrm{out}} \,| S$$

となる。

力の向きは、圧力が高い側から低い側へ向かう。これは両面の圧力による力の合計であり、板自身に働く重力などを含めた全合力とは区別する。

開放水面と底板の外側の両方に同じ大気圧 p_0 が働く場合、底板の内外の差圧は

$$p - p_0 = \rho g h$$

となる。

そのため、外側の大気圧が相殺された後の圧力による合力は、面積が一定なら $\rho g h S$ で求められる。

この力と、底板内側の絶対圧による片面の力 pS は異なる。

6. 例題で考え方を確かめる

1

問題

水平な板に、面と垂直な向きで 60 N の力を一様に加える。力を受ける面積は 20 cm^2 である。

(1) 面積を m^2 で表せ。

(2) 板が受ける圧力を Pa で求めよ。

(3) 力を 60 N に保ったまま、面積を 40 cm^2 にしたとき、圧力はどう変わるか。計算して説明せよ。

解答・解説

(1) 面積は長さの二乗であるため、

$$\begin{aligned} S &= 20\,\mathrm{cm}^2 \\ &= 20 \times \left(0.0001\,\mathrm{m}^2\right) \\ &= 0.0020\,\mathrm{m}^2 \end{aligned}$$

となる。

(2) 面に垂直に働く力を面積で割る。

$$\begin{aligned} p &= \frac{F_{\perp}}{S} \\ &= \frac{60\,\mathrm{N}}{0.0020\,\mathrm{m}^2} \\ &= 30000\,\mathrm{Pa} \end{aligned}$$

したがって、圧力は 30000 Pa である。

(3) 新しい面積は

$$40\,\mathrm{cm}^2 = 0.0040\,\mathrm{m}^2$$

である。

新しい圧力を p' とすると、

$$\begin{aligned} p' &= \frac{60\,\mathrm{N}}{0.0040\,\mathrm{m}^2} \\ &= 15000\,\mathrm{Pa} \end{aligned}$$

となる。

力を変えずに面積を 2 倍にしたため、圧力は半分になる。力が小さくなったわけではなく、同じ力が広い面積へ分散された結果である。

2

問題

水平な液面をもつ開放容器に水が静止している。水の密度を $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$、重力加速度を $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$、液面の絶対圧を $p_0 = 100000\,\mathrm{Pa}$ とする。水の密度は一定である。

(1) 液面から鉛直下向きに $0.40\,\mathrm{m}$ の深さにある点で、液面から増加した圧力を求めよ。

(2) (1)の点での絶対圧を求めよ。

(3) 同じ水中で、深さ $0.20\,\mathrm{m}$ の点から深さ $0.50\,\mathrm{m}$ の点までの圧力の増加量を求めよ。

解答・解説

(1) 求めるのは絶対圧ではなく、液面からの増分 Δp である。

$$\begin{aligned} \Delta p &= \rho g h \\ &= (1000\,\mathrm{kg/m^3})(10\,\mathrm{m/s^2})(0.40\,\mathrm{m}) \\ &= 4000\,\mathrm{Pa} \end{aligned}$$

よって、深さによる圧力の増分は $4000\,\mathrm{Pa}$ である。

(2) 絶対圧は液面の圧力を加えた量である。

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \rho g h \\ &= 100000\,\mathrm{Pa} + 4000\,\mathrm{Pa} \\ &= 104000\,\mathrm{Pa} \end{aligned}$$

したがって、絶対圧は $104000\,\mathrm{Pa}$ となる。

(3) 2 点の深さの差は、

$$\Delta h = 0.50\,\mathrm{m} - 0.20\,\mathrm{m} = 0.30\,\mathrm{m}$$

である。

同じ液体で密度と重力加速度が一定なので、圧力の差は

$$\begin{aligned}\Delta p &= \rho g \Delta h \\ &= (1000\,\mathrm{kg/m^3})(10\,\mathrm{m/s^2})(0.30\,\mathrm{m}) \\ &= 3000\,\mathrm{Pa}\end{aligned}$$

となる。

同じ液面圧力からそれぞれの絶対圧を計算して差をとっても、液面圧力は打ち消し合う。

深さ	液面からの圧力増分	絶対圧
$0.20\,\mathrm{m}$	$2000\,\mathrm{Pa}$	$102000\,\mathrm{Pa}$
$0.40\,\mathrm{m}$	$4000\,\mathrm{Pa}$	$104000\,\mathrm{Pa}$
$0.50\,\mathrm{m}$	$5000\,\mathrm{Pa}$	$105000\,\mathrm{Pa}$

液面からの深さが増すほど、圧力は大きくなる。深さの差による圧力の増加量は、その 2 点の深さの差から直接求められる。

3

問題

水平な底面をもつ容器に水が静止している。底面は液面から鉛直下向きに $0.40\,\mathrm{m}$ の位置にあり、底面積は $0.030\,\mathrm{m^2}$ である。

水の密度は $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$、重力加速度は $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$、液面の絶対圧は $p_0 = 100000\,\mathrm{Pa}$ とする。液面は水平であり、水の密度は一定である。

(1) 底面の内側が受ける絶対圧を求めよ。

(2) 底面の内側が水から受ける絶対圧による力の大きさを求めよ。

(3) 液面からの圧力増分だけに対応する底面の力の大きさを求めよ。

(4) 底板の外側にも一様に $100000\,\mathrm{Pa}$ の大気圧が働くとする。底板の内外の圧力差による合力の大きさと向きを答えよ。底面の内外で圧力を受ける面積は同じとする。

解答・解説

(1) 深さによる圧力の増分は、

$$\begin{aligned} \rho g h &= (1000\,\mathrm{kg/m^3})(10\,\mathrm{m/s^2})(0.40\,\mathrm{m}) \\ &= 4000\,\mathrm{Pa} \end{aligned}$$

である。

底面の内側の絶対圧は、

$$\begin{aligned} p &= 100000\,\mathrm{Pa} + 4000\,\mathrm{Pa} \\ &= 104000\,\mathrm{Pa} \end{aligned}$$

となる。

(2) 底面の内側には、絶対圧 104000 Pa が一様に働く。

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{in}} &= pS \\ &= (104000\,\mathrm{Pa})(0.030\,\mathrm{m^2}) \\ &= 3120\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

したがって、内側が水から受ける力の大きさは 3120 N であり、向きは鉛直下向きである。

(3) 液面からの圧力増分に対応する力は、

$$\begin{aligned} \Delta F &= (\rho g h)S \\ &= (4000\,\mathrm{Pa})(0.030\,\mathrm{m^2}) \\ &= 120\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

これは絶対圧による片面の力ではなく、液面圧力を差し引いた増分に対応する力である。

(4) 底板の外側からは大気圧による上向きの力が働く。その大きさは、

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{out}} &= (100000\,\mathrm{Pa})(0.030\,\mathrm{m^2}) \\ &= 3000\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

である。

底板の内側からの力は下向き 3120 N、外側からの力は上向き 3000 N なので、圧力による合力は、

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{net}} &= 3120\,\mathrm{N} - 3000\,\mathrm{N} \\ &= 120\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となり、鉛直下向きに働く。

このように、3120 N は内側の片面に働く力、120 N は内外の圧力差による合力である。何を求める問題なのかによって答えが異なる。

演習問題

1

水平な板に、面と垂直な向きで 48 N の力を一様に加える。力を受ける面積は 12 cm^2 である。

(1) 面積を m^2 で表せ。

(2) 板に働く圧力を求めよ。

(3) 力を変えずに面積を 24 cm^2 にした場合の圧力を求め、(2)の値と比べて理由を説明せよ。

2

ある一様な液体の質量は 0.60 kg、体積は 0.00050 m^3 である。

(1) この液体の密度を $\mathrm{kg/m}^3$ で求めよ。

(2) (1)の密度を $\mathrm{g/cm}^3$ で表せ。

(3) 別の一様な液体は、質量が同じ 0.60 kg で、体積が 0.00030 m^3 である。どちらの液体の密度が大きいか、計算して説明せよ。

3

水平な液面をもつ容器に密度 1000 $\mathrm{kg/m}^3$ の水が静止している。重力加速度を 10 $\mathrm{m/s}^2$、液面の絶対圧を 100000 Pa とする。密度と重力加速度は一定である。

液面から鉛直下向きに 0.30 m の位置を A、0.80 m の位置を B とする。

(1) A、B のそれぞれについて、液面からの圧力の増分を求めよ。

(2) A、B の絶対圧をそれぞれ求めよ。

(3) A から B へ移ると圧力はいくら増加するか。深さの差を使って説明せよ。

4

静止した水が入った容器 X、Y、Z について考える。どの容器も水の密度は 1000 $\mathrm{kg/m}^3$、重力加速度は 10 $\mathrm{m/s}^2$ で一定であり、液面は水平である。

容器 X は細長く、容器 Y は横幅が広い。両者は液面の絶対圧が同じ 100000 Pa である。

容器 Z には同じ水が入っているが、液面の絶対圧は 102000 Pa である。

(1) 容器 X と Y で、各液面から鉛直下向きに 0.50 m の深さにある点の絶対圧を比較せよ。容器の形状に触れて理由を説明せよ。

(2) 容器 X と Z で、各液面から鉛直下向きに 0.50 m の深さにある点の絶対圧をそれぞれ求めよ。

(3) (2)について、同じ深さでも絶対圧が等しくならない理由を説明せよ。

©ミライコーチング

5

水平な底板をもつ容器に水が静止している。底板は液面から鉛直下向きに 0.60 m の位置にあり、内側と外側で圧力を受ける面積はともに 0.020 m^2 である。

水の密度は 1000 $\mathrm{kg/m^3}$、重力加速度は 10 $\mathrm{m/s^2}$、液面の絶対圧は 100000 Pa とする。液面は水平で、水の密度は一定である。

底板の外側には同じく 100000 Pa の大気圧が一様に働く。

(1) 底板の内側での絶対圧を求めよ。

(2) 内側の水が底板に及ぼす力の大きさと向きを求めよ。

(3) 外側の大気が底板に及ぼす力の大きさと向きを求めよ。

(4) 内外の圧力による合力の大きさと向きを求めよ。

6

静止した一様密度の水の中に、断面積 0.020 m^2、高さ 0.25 m の仮想的な鉛直の水柱を考える。

水柱の上面は水平な液面に接し、下面はその真下の深さ 0.25 m の位置にある。液面圧力は 100000 Pa、水の密度は 1000 $\mathrm{kg/m^3}$、重力加速度は 10 $\mathrm{m/s^2}$ で一定である。

(1) 水柱の体積、質量、重力の大きさを求めよ。

(2) 水柱の上面に働く圧力による力の大きさと向きを答えよ。

(3) 水柱の鉛直方向のつり合いから、下面に働く圧力による力の大きさと向きを求めよ。

(4) 下面の絶対圧を求め、$p = p_0 + \rho g h$ を使って求めた値と一致することを確かめよ。

7

静止した水の中に、鉛直な小さな壁面がある。壁面の面積は 0.0040 m^2 で、液面から鉛直下向きに 0.50 m の深さにあるとする。

水の密度は 1000 $\mathrm{kg/m^3}$、重力加速度は 10 $\mathrm{m/s^2}$、液面の絶対圧は 100000 Pa である。液面は水平であり、水は静止し、密度は一定である。

この壁面は十分に小さく、全面で深さ 0.50 m の絶対圧が一様に働くものとする。壁面の片側だけが水に接している。

(1) 壁面の水に接する側での絶対圧を求めよ。

(2) 水が壁面の片面に及ぼす力の大きさと向きを求めよ。

(3) これより高さのある側壁全体について、ある 1 点の圧力に側壁全体の面積を掛ける計算が一般に使えない理由を説明せよ。

©ミライコーチング

演習問題の解答・解説

1

(1) 長さの換算係数を二乗する。

$$\begin{aligned} S &= 12\,\mathrm{cm}^2 \\ &= 12 \times \left(0.0001\,\mathrm{m}^2\right) \\ &= 0.0012\,\mathrm{m}^2 \end{aligned}$$

答え：$0.0012\,\mathrm{m}^2$

(2) 圧力の定義を用いる。

$$\begin{aligned} p &= \frac{F_{\perp}}{S} \\ &= \frac{48\,\mathrm{N}}{0.0012\,\mathrm{m}^2} \\ &= 40000\,\mathrm{Pa} \end{aligned}$$

答え：$40000\,\mathrm{Pa}$

(3) 新しい面積は、

$$24\,\mathrm{cm}^2 = 0.0024\,\mathrm{m}^2$$

である。

したがって、

$$\begin{aligned} p' &= \frac{48\,\mathrm{N}}{0.0024\,\mathrm{m}^2} \\ &= 20000\,\mathrm{Pa} \end{aligned}$$

となる。

答え：$20000\,\mathrm{Pa}$。**圧力は半分になる。**

面に垂直な力は同じ $48\,\mathrm{N}$ であるが、その力を受ける面積が 2 倍になったため、単位面積あたりの力が半分になる。

2

(1) 密度は質量を体積で割る。

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{m}{V} \\ &= \frac{0.60\,\mathrm{kg}}{0.00050\,\mathrm{m^3}} \\ &= 1200\,\mathrm{kg/m^3}\end{aligned}$$

答え：$1200\,\mathrm{kg/m^3}$

(2) $1\,\mathrm{g/cm^3} = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$ なので、

$$1200\,\mathrm{kg/m^3} = 1.2\,\mathrm{g/cm^3}$$

となる。

答え：$1.2\,\mathrm{g/cm^3}$

(3) 別の液体の密度を ρ' とすると、

$$\begin{aligned}\rho' &= \frac{0.60\,\mathrm{kg}}{0.00030\,\mathrm{m^3}} \\ &= 2000\,\mathrm{kg/m^3}\end{aligned}$$

である。

答え：別の液体の方が密度は大きい。

最初の液体は $1200\,\mathrm{kg/m^3}$、別の液体は $2000\,\mathrm{kg/m^3}$ である。質量が同じ場合、体積が小さいほど単位体積あたりに含まれる質量が大きくなる。

3

(1) 深さによる圧力の増分は $\rho g h$ で求める。

A について、

$$\begin{aligned}\Delta p_{\mathrm{A}} &= (1000\,\mathrm{kg/m^3})(10\,\mathrm{m/s^2})(0.30\,\mathrm{m}) \\ &= 3000\,\mathrm{Pa}\end{aligned}$$

となる。

B について、

$$\begin{aligned}\Delta p_{\mathrm{B}} &= (1000\,\mathrm{kg/m^3})(10\,\mathrm{m/s^2})(0.80\,\mathrm{m}) \\ &= 8000\,\mathrm{Pa}\end{aligned}$$

となる。

答え：A は $3000\,\mathrm{Pa}$**、B は** $8000\,\mathrm{Pa}$

(2) 絶対圧には液面圧力を加える。

A の絶対圧は、

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{A}} &= 100000\,\mathrm{Pa} + 3000\,\mathrm{Pa} \\ &= 103000\,\mathrm{Pa} \end{aligned}$$

である。

B の絶対圧は、

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{B}} &= 100000\,\mathrm{Pa} + 8000\,\mathrm{Pa} \\ &= 108000\,\mathrm{Pa} \end{aligned}$$

となる。

答え：A は $103000\,\mathrm{Pa}$**、B は** $108000\,\mathrm{Pa}$

(3) 深さの差は、

$$\Delta h = 0.80\,\mathrm{m} - 0.30\,\mathrm{m} = 0.50\,\mathrm{m}$$

である。

圧力差は、

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{B}} - p_{\mathrm{A}} &= \rho g \Delta h \\ &= (1000\,\mathrm{kg/m^3})(10\,\mathrm{m/s^2})(0.50\,\mathrm{m}) \\ &= 5000\,\mathrm{Pa} \end{aligned}$$

となる。

答え：$5000\,\mathrm{Pa}$ **増加する。**

同じ水の中で 2 点を比較しているため、液面圧力は両方の絶対圧に共通して含まれる。そのため、深さの差から圧力差を直接求められる。

4

(1) X と Y は容器の形状が異なるが、同じ密度の水が静止し、液面圧力と重力加速度が等しい。

どちらも液面からの鉛直深さは $0.50\,\mathrm{m}$ なので、圧力は等しい。

答え：X と Y の絶対圧は等しい。

静止した一様密度の液体では、圧力は液面圧力・密度・重力加速度・鉛直深さで決まる。容器の横幅が広いことだけを理由に圧力が大きいとは判断できない。

(2) 共通する深さによる圧力増分は、

$$\begin{aligned} \rho g h &= (1000\,\mathrm{kg/m^3})(10\,\mathrm{m/s^2})(0.50\,\mathrm{m}) \\ &= 5000\,\mathrm{Pa} \end{aligned}$$

となる。

X の絶対圧は、

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{X}} &= 100000\,\mathrm{Pa} + 5000\,\mathrm{Pa} \\ &= 105000\,\mathrm{Pa} \end{aligned}$$

である。

Z の絶対圧は、

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{Z}} &= 102000\,\mathrm{Pa} + 5000\,\mathrm{Pa} \\ &= 107000\,\mathrm{Pa} \end{aligned}$$

である。

答え：X は $105000\,\mathrm{Pa}$**、Z は** $107000\,\mathrm{Pa}$

(3) X と Z は密度・重力加速度・深さが等しいため、深さによる圧力増分は同じ $5000\,\mathrm{Pa}$ である。

しかし、液面圧力が異なるため、絶対圧は一致しない。

$$p_{\mathrm{Z}} - p_{\mathrm{X}} = 107000\,\mathrm{Pa} - 105000\,\mathrm{Pa} = 2000\,\mathrm{Pa}$$

答え：液面圧力が異なるためである。

「同じ深さなら同じ圧力」という関係は、同じ液体・同じ液面圧力・同じ重力加速度という条件で用いる。

5

(1) 深さによる圧力増分は、

$$\begin{aligned} \rho g h &= (1000\,\mathrm{kg/m^3})(10\,\mathrm{m/s^2})(0.60\,\mathrm{m}) \\ &= 6000\,\mathrm{Pa} \end{aligned}$$

となる。

底板内側の絶対圧は、

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{in}} &= 100000\,\mathrm{Pa} + 6000\,\mathrm{Pa} \\ &= 106000\,\mathrm{Pa} \end{aligned}$$

となる。

答え：$106000\,\mathrm{Pa}$

(2) 内側の水が底板へ及ぼす力は、

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{in}} &= (106000\,\mathrm{Pa})(0.020\,\mathrm{m^2}) \\ &= 2120\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

答え：2120 N、鉛直下向き

水は底板の内側の面を垂直に押す。

(3) 外側の大気圧による力は、

$$\begin{aligned} F_{\text{out}} &= (100000\,\text{Pa})(0.020\,\text{m}^2) \\ &= 2000\,\text{N} \end{aligned}$$

となる。

答え：2000 N、鉛直上向き

外側から底板を押すため、内側の水が及ぼす力とは逆向きとなる。

(4) 内側から下向きに 2120 N、外側から上向きに 2000 N が働く。

したがって、

$$\begin{aligned} F_{\text{net}} &= 2120\,\text{N} - 2000\,\text{N} \\ &= 120\,\text{N} \end{aligned}$$

となる。

答え：120 N、鉛直下向き

別の求め方として、内外の圧力差を使ってもよい。

$$\begin{aligned} F_{\text{net}} &= (106000\,\text{Pa} - 100000\,\text{Pa})(0.020\,\text{m}^2) \\ &= (6000\,\text{Pa})(0.020\,\text{m}^2) \\ &= 120\,\text{N} \end{aligned}$$

内外で同じ大気圧が働いているため、大気圧による力の寄与が相殺される。

ここで得た 120 N は、底板に働く内外の圧力による合力である。底板自身の重力や支持する力まで含めた全合力を求めたわけではない。

6

(1) 水柱の体積は、

$$\begin{aligned} V &= Sh \\ &= (0.020\,\mathrm{m}^2)(0.25\,\mathrm{m}) \\ &= 0.0050\,\mathrm{m}^3 \end{aligned}$$

である。

水柱の質量は、

$$\begin{aligned} m &= \rho V \\ &= (1000\,\mathrm{kg/m}^3)(0.0050\,\mathrm{m}^3) \\ &= 5.0\,\mathrm{kg} \end{aligned}$$

となる。

重力の大きさは、

$$\begin{aligned} W &= mg \\ &= (5.0\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s}^2) \\ &= 50\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

である。

答え：体積 $0.0050\,\mathrm{m}^3$**、質量** $5.0\,\mathrm{kg}$**、重力** $50\,\mathrm{N}$

(2) 上面に働く圧力は液面圧力 $100000\,\mathrm{Pa}$ である。

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{top}} &= p_0 S \\ &= (100000\,\mathrm{Pa})(0.020\,\mathrm{m}^2) \\ &= 2000\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

答え：$2000\,\mathrm{N}$**、鉛直下向き**

上面の圧力は仮想水柱を上から押すため、力は下向きである。

(3) 鉛直上向きを正方向とする。

下面の圧力による力を F_{bottom} とすると、上面の圧力による力と重力は下向きなので、

$$F_{\mathrm{bottom}} - F_{\mathrm{top}} - W = 0$$

が成り立つ。

したがって、

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{bottom}} &= 2000\,\mathrm{N} + 50\,\mathrm{N} \\ &= 2050\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

答え：2050 N、鉛直上向き

静止した水柱の下面には、上面から押される力と水柱自身の重力を支えるだけの上向きの力が働く。

(4) 下面の絶対圧は、下面の力を断面積で割って求められる。

$$\begin{aligned} p &= \frac{2050\,\mathrm{N}}{0.020\,\mathrm{m^2}} \\ &= 102500\,\mathrm{Pa} \end{aligned}$$

一方、静止液体の圧力の式を用いると、

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \rho g h \\ &= 100000\,\mathrm{Pa} \\ &\quad + (1000\,\mathrm{kg/m^3})(10\,\mathrm{m/s^2})(0.25\,\mathrm{m}) \\ &= 102500\,\mathrm{Pa} \end{aligned}$$

となり、一致する。

答え：下面の絶対圧は 102500 Pa

圧力の式が、仮想的に取り出した水柱の力のつり合いと整合していることが確かめられた。

7

(1) 壁面の深さ 0.50 m における水の絶対圧を求める。

深さによる増分は、

$$\begin{aligned} \rho g h &= (1000\,\mathrm{kg/m^3})(10\,\mathrm{m/s^2})(0.50\,\mathrm{m}) \\ &= 5000\,\mathrm{Pa} \end{aligned}$$

である。

したがって、

$$\begin{aligned} p &= 100000\,\mathrm{Pa} + 5000\,\mathrm{Pa} \\ &= 105000\,\mathrm{Pa} \end{aligned}$$

となる。

答え：105000 Pa

(2) 小さな壁面全体に一様な圧力が働く設定なので、

$$\begin{aligned} F &= pS \\ &= (105000\,\mathrm{Pa})(0.0040\,\mathrm{m^2}) \\ &= 420\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

答え：420 N、壁面に垂直な水平方向

壁面は鉛直なので、その面に垂直な方向は水平である。水から壁面へ向かう向きに力が働く。

これは水に接する片面が受ける絶対圧による力であり、壁面の反対側からの圧力による力は含めていない。

(3) 高さのある側壁では、液面に近い部分と深い部分とで圧力が異なる。

静止した一様密度の液体でも、

$$p = p_0 + \rho g h$$

によって深さ h ごとに圧力が変わるため、側壁全体が同じ圧力を受けているとは限らない。

答え：側壁上の位置によって深さが異なり、圧力が一様ではないためである。

一様圧力の場合の $F = pS$ を使って側壁全体の力を求めるには、面全体の圧力が同じであるという条件が必要である。

この問題の(2)では、小さな壁面の全面で圧力を一様とする条件が明示されていたため、$F = pS$ をそのまま用いることができた。