

第 13 講 絶対値と数直線上の距離

学習目標

- 絶対値を、数直線上で原点からの距離として説明できる。
- 正の数・負の数・0の絶対値を正しく求められる。
- $|a - b|$ を、数直線上の2点 a, b の距離として読み取れる。
- 絶対値を含む基本的な方程式・不等式を、距離の意味から解釈できる。

絶対値は「符号を消す操作」ではない

原点からどれだけ離れているか

数直線上で3は原点0から右へ3だけ離れています。
一方、-3は原点から左へ3だけ離れています。
向きは反対ですが、どちらも原点からの距離は3です。
この「原点からの距離」を表すものが絶対値です。



-3と3はどちらも原点から距離3

絶対値

実数 a に対して、数直線上で a を表す点と原点との距離を、 a の絶対値といい、 $|a|$ と表します。

絶対値の基本

5は原点から距離5の位置にあるので、 $|5| = 5$ です。
-5も原点からの距離は5なので、 $|-5| = 5$ です。
また、0は原点そのものなので、 $|0| = 0$ です。

絶対値と符号

$a \geq 0$ のとき、

$$|a| = a$$

です。

$a < 0$ のとき、

$$|a| = -a$$

です。

負の数 a に対して $-a$ は正の数になるため、絶対値は必ず0以上になります。

マイナスを機械的に消さない

絶対値は「-があれば消す」という記号ではありません。
たとえば $|-x|$ を考えるとき、 x の符号が分からなければ、その値を単に x とすることはできません。
絶対値では、**中の式が正か負か** を考えることが基本です。

2点間の距離を絶対値で表す

原点以外からの距離へ広げる

数直線上の点2と点7の距離は、

$$7 - 2 = 5$$

です。

では、点7と点2の順に引くと、

$$2 - 7 = -5$$

となります。

距離は負にはならないので、引く順序によって符号が変わるのは不便です。
そこで絶対値を使うと、

$$|7 - 2| = 5$$

でも、

$$|2 - 7| = 5$$

でも、同じ距離を表せます。

数直線上の2点間の距離

数直線上で、座標が a と b である2点間の距離は、

$$|a - b|$$

で表されます。

$|a - b| = |b - a|$ なので、どちらからどちらを引いても距離は同じです。

点 -2 と点 4 の距離

点 -2 と点 4 の距離は、

$$|4 - (-2)| = |6| = 6$$

です。

数直線で見ると、 -2 から 0 まだが 2 、 0 から 4 まだが 4 なので、合計 6 となります。

$|x| = a$ を距離として考える

原点から一定の距離にある点

方程式

$$|x| = 4$$

は、「数直線上で、原点からの距離が 4 である点を求める」という意味です。

原点から右へ 4 の位置は 4 、左へ 4 の位置は -4 です。

したがって、解は $x = 4, -4$ です。



原点から距離 4 にある2点

絶対値方程式では、記号だけを操作するよりも、まず「どこからどれだけ離れているか」と読むと意味をつかみやすくなります。

$|x| = -2$ を満たす実数はない

絶対値は距離なので、必ず 0 以上です。

したがって、

$$|x| = -2$$

を満たす実数 x は存在しません。

$|x - a|$ は点 a からの距離

基準となる点をずらす

$|x|$ は、点 x と原点 0 の距離です。

同じ考え方で、

$$|x - 3|$$

は、数直線上の点 x と点 3 の距離を表します。

したがって、

$$|x - 3| = 2$$

は、「点 3 から距離 2 にある点を求める」という意味です。

点 3 から右へ 2 進むと 5 、左へ 2 進むと 1 なので、解は $x = 1, 5$ です。

絶対値を見たときの読み方

・ $|x|$ は、点 x と原点との距離。

・ $|x - a|$ は、点 x と点 a との距離。

・ $|a - b|$ は、点 a と点 b との距離。

「絶対値＝距離」と読めると、方程式や不等式の意味が見えやすくなります。

絶対値を含む不等式

距離が小さいときは内側
不等式

$$|x| < 3$$

は、「原点からの距離が3より小さい」という意味です。
したがって、 x は -3 と 3 の間にあります。

$$-3 < x < 3$$

です。
一方、

$$|x| > 3$$

は、「原点からの距離が3より大きい」という意味です。
したがって、 x は -3 より左、または 3 より右にあります。
つまり、 $x < -3$ または $x > 3$ です。

内側か外側かを見る

$a > 0$ とします。

$|x| < a$ は、原点からの距離が a より小さいので、 $-a$ と a の内側を表します。

$|x| > a$ は、原点からの距離が a より大きいので、 $-a$ と a の外側を表します。
等号を含むときも、距離の意味は同じです。

例題

例題 1

次の値を求めなさい。

- (1) $|7|$
- (2) $|-9|$
- (3) $|3-8|$
- (4) $|-4-2|$

例題 1 の解答・解説

- (1) 7 は原点から距離 7 の位置にあるので、 $|7| = 7$ です。
- (2) -9 は原点から距離 9 の位置にあるので、 $|-9| = 9$ です。
- (3) 絶対値の中を先に計算すると、

$$|3-8| = |-5| = 5$$

です。

- (4) 同様に、

$$|-4-2| = |-6| = 6$$

です。

絶対値は、中の値を求めたあと、その数と原点との距離を考えます。

例題 2

数直線上の点 $A(-5)$ と点 $B(2)$ の距離を求めなさい。

例題 2 の解答・解説

2 点間の距離は、座標の差の絶対値で表せます。

$$|2 - (-5)| = |7| = 7$$

したがって、点 A と点 B の距離は 7 です。

$|-5-2| = |-7| = 7$ と計算しても同じ結果になります。

例題 3

次の方程式を解きなさい。

- (1) $|x| = 6$
- (2) $|x-2| = 3$

例題 3 の解答・解説

- (1) $|x| = 6$ は、原点から距離 6 にある点を求める問題です。
原点から右へ 6 の点と左へ 6 の点があるので、解は $x = 6, -6$ です。
- (2) $|x-2| = 3$ は、点 2 から距離 3 にある点を求める問題です。
点 2 から右へ 3 進むと 5、左へ 3 進むと -1 です。
したがって、解は $x = -1, 5$ です。

■ 演習問題

練習問題 1

次の値を求めなさい。

- (1) $|-12|$
- (2) $|0|$
- (3) $|5-11|$
- (4) $|-3-5|$

練習問題 2

数直線上の次の 2 点間の距離を求めなさい。

- (1) $A(1)$ 、 $B(8)$
- (2) $C(-6)$ 、 $D(3)$
- (3) $E(-7)$ 、 $F(-2)$

練習問題 3

次の方程式を解きなさい。

- (1) $|x| = 5$
- (2) $|x| = 0$
- (3) $|x| = -4$

練習問題 4

次の方程式を解きなさい。

- (1) $|x-4| = 2$
- (2) $|x+3| = 5$
- (3) $|x-1| = 7$

練習問題 5

次の不等式を満たす x の範囲を求めなさい。

- (1) $|x| < 4$
- (2) $|x| \leq 2$
- (3) $|x| > 5$

練習問題 6

次の不等式を満たす x の範囲を求めなさい。

- (1) $|x-2| < 3$
- (2) $|x+1| \leq 4$

練習問題 7

数直線上で、点 3 からの距離が 5 以下である点 x の範囲を、絶対値を含む不等式で表し、さらに x の範囲を求めなさい。

練習問題 8

ある生徒は $|-4| = -4$ と計算しました。

この計算が誤っている理由を、絶対値の意味に触れながら説明しなさい。

■ 演習問題の解答・解説

練習問題 1 の解答・解説

- (1) -12 と原点との距離は 12 なので、 $|-12| = 12$ です。
(2) 0 と原点との距離は 0 なので、 $|0| = 0$ です。
(3)

$$|5 - 11| = |-6| = 6$$

です。

(4)

$$|-3 - 5| = |-8| = 8$$

です。

したがって、答えは順に $12, 0, 6, 8$ です。

練習問題 2 の解答・解説

(1)

$$|8 - 1| = 7$$

なので、距離は 7 です。

(2)

$$|3 - (-6)| = |9| = 9$$

なので、距離は 9 です。

(3)

$$|-2 - (-7)| = |5| = 5$$

なので、距離は 5 です。

負の座標を含む場合でも、座標の差の絶対値を使えば同じ方法で求められます。

練習問題 3 の解答・解説

- (1) $|x| = 5$ は、原点から距離 5 にある点を求める式です。したがって、 $x = 5, -5$ です。
(2) 原点からの距離が 0 である点は原点だけなので、 $x = 0$ です。
(3) 絶対値は距離を表すため、負の値になることはありません。
したがって、 $|x| = -4$ を満たす実数 x はありません。

練習問題 4 の解答・解説

- (1) $|x - 4| = 2$ は、点 4 から距離 2 にある点を表します。
したがって、 $x = 2, 6$ です。
(2) $|x + 3| = |x - (-3)|$ なので、点 -3 から距離 5 にある点を考えます。
点 -3 から右へ 5 進むと 2 、左へ 5 進むと -8 です。
したがって、 $x = -8, 2$ です。
(3) $|x - 1| = 7$ は、点 1 から距離 7 にある点を表します。
したがって、 $x = -6, 8$ です。

練習問題 5 の解答・解説

(1) $|x| < 4$ は、原点からの距離が 4 より小さいことを表します。
したがって、

$$-4 < x < 4$$

です。

(2) $|x| \leq 2$ は、原点からの距離が 2 以下であることを表します。
したがって、

$$-2 \leq x \leq 2$$

です。

(3) $|x| > 5$ は、原点からの距離が 5 より大きいことを表します。
したがって、 $x < -5$ または $x > 5$ です。

距離が小さいときは 2 つの境界の内側、距離が大きいときは外側になります。

練習問題 6 の解答・解説

(1) $|x - 2| < 3$ は、点 2 からの距離が 3 より小さいことを表します。
左端は $2 - 3 = -1$ 、右端は $2 + 3 = 5$ なので、

$$-1 < x < 5$$

です。

(2) $|x + 1| = |x - (-1)|$ なので、点 -1 からの距離を表しています。
距離が 4 以下なので、左端は $-1 - 4 = -5$ 、右端は $-1 + 4 = 3$ です。
したがって、

$$-5 \leq x \leq 3$$

です。

練習問題 7 の解答・解説

点 x と点 3 の距離は、

$$|x - 3|$$

と表せます。

その距離が 5 以下なので、不等式は

$$|x - 3| \leq 5$$

です。

点 3 から左へ 5 進んだ点は -2 、右へ 5 進んだ点は 8 です。
したがって、

$$-2 \leq x \leq 8$$

です。

練習問題 8 の解答・解説

絶対値 $|-4|$ は、数直線上で点 -4 と原点との距離を表します。
距離は 4 なので、

$$|-4| = 4$$

です。

絶対値は元の数をもそのまま書く記号ではなく、原点からの距離を表すため、その値が負になることはありません。