

第 105 講 三角関数の基本的な性質

学習目標

- 単位円上の点の座標から、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ が成り立つ理由を説明できる。
- 三角関数の基本関係式と成立条件を使い、1つの値から他の値を求められる。
- 単位円上の対称移動から、 $-\theta$ 、 $\pi - \theta$ 、 $\theta + \pi$ の三角関数の値を求められる。

1. 単位円から基本関係式を導く

座標と三角関数を結び付ける

単位円上に、角 θ に対応する点 $P(x, y)$ をとる。このとき、 $\cos \theta = x$ 、 $\sin \theta = y$ である。したがって、三角関数の基本的な性質を考えると、式だけを見るのではなく、単位円上の点 P の位置とその x 座標・ y 座標を見ることが重要である。次の図では $P = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ とし、 x 軸・ y 軸への射影を示している。点 P は単位円上にあり、横方向の座標が $\cos \theta$ 、縦方向の座標が $\sin \theta$ である。

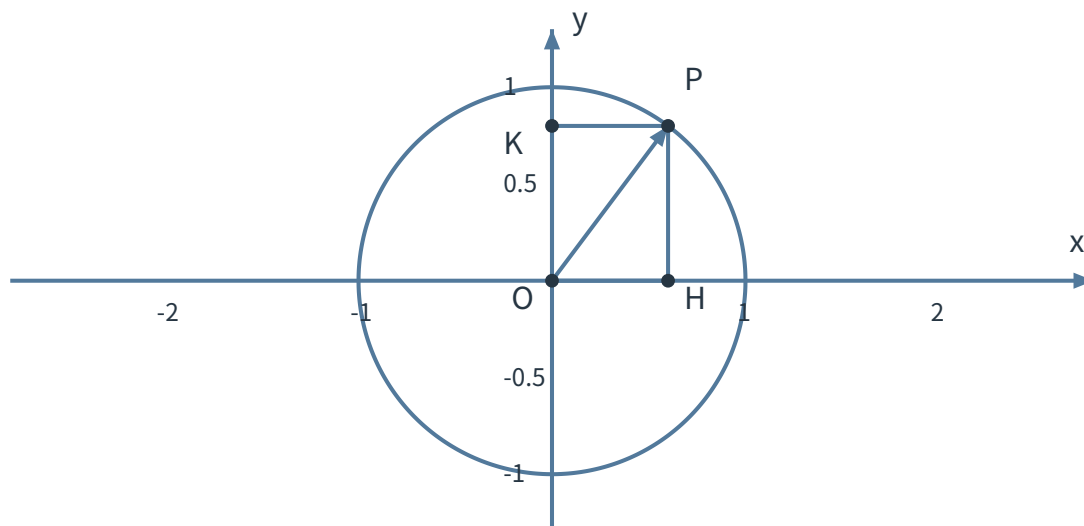


図 1 単位円上の $P=(3/5, 4/5)$ と座標軸への射影

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

単位円の半径は 1 であるため、単位円上の点 $P(x, y)$ は $x^2 + y^2 = 1$ を満たす。ここに $x = \cos \theta$ 、 $y = \sin \theta$ を代入すると、次の関係が得られる。

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

これは特別な角だけでなく、すべての角 θ について成り立つ。もとの $x^2 + y^2 = 1$ が単位円そのものを表す式であるためである。

正接との関係

$\cos \theta \neq 0$ のとき、正接は $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ である。

さらに、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ の両辺を $\cos^2 \theta$ で割る。ただし、 $\cos \theta \neq 0$ が必要である。

左辺の第 1 項は $\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \tan^2 \theta$ 、第 2 項は 1 である。よって、 $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ となる。

正接では 0 で割らない

$\cos \theta = 0$ のとき、 $\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ は分母が 0 になるため、 $\tan \theta$ は定義されない。

したがって、 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ や $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ を使う前には、 $\cos \theta \neq 0$ であることを確認する必要がある。

2. 値域と平方根の符号 **$\sin \theta$ と $\cos \theta$ の値域**

単位円上の点の x 座標は -1 から 1 まで、 y 座標も -1 から 1 までの範囲にある。

$\cos \theta$ は x 座標、 $\sin \theta$ は y 座標であるため、どのような角 θ でも $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ 、 $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ である。

したがって、 $\cos \theta = \frac{3}{2}$ や $\sin \theta = -\frac{5}{4}$ のように絶対値が 1 を超える値をとることはない。

平方根を使うときは象限を見る

例えば $\sin \theta = \frac{3}{5}$ のとき、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ から $\cos^2 \theta = \frac{16}{25}$ となるので、 $\cos \theta = \pm \frac{4}{5}$ である。

ここで $\pm$ のどちらを選ぶかは、角 θ の終辺がどの象限にあるかで決まる。 $\cos \theta$ は単位円上の点の x 座標なので、右半分では正、左半分では負である。同様に、 $\sin \theta$ は y 座標なので、上半分では正、下半分では負である。

二乗から戻すときの注意

$\cos^2 \theta = a$ から直ちに $\cos \theta = \sqrt{a}$ としてはいけない。まず $\cos \theta = \pm \sqrt{a}$ とし、その後で点の位置や象限から符号を 1 つに決めるのである。

$\sin \theta$ を求める場合も同じ考え方である。

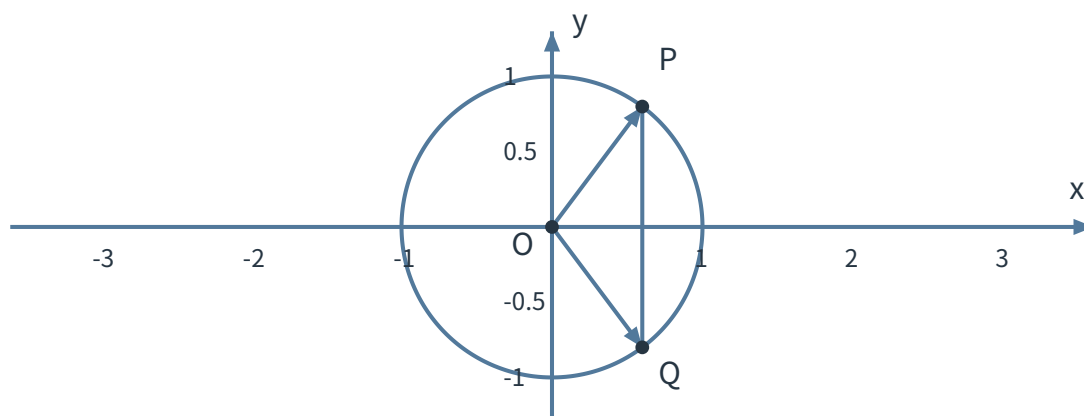
3. 単位円の対称性 **$-\theta$ は x 軸について対称**

図 2 x 軸対称による θ と $-\theta$ の対応

第 1 象限にある $P = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ が角 θ に対応するとする。角を $-\theta$ にすると、対応する点は x 軸について対称な位置へ移る。

x 座標は変わらず、 y 座標だけが反対符号になるため、対応する点は $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ である。
したがって、 $\cos(-\theta) = \cos \theta$ 、 $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ である。また、 $\cos \theta \neq 0$ のとき $\tan(-\theta) = -\tan \theta$ である。

$\pi - \theta$ は y 軸について対称

$P = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ に対し、角 $\pi - \theta$ に対応する点は y 軸について対称な位置にある。
 y 座標は変わらず、 x 座標だけが反対符号になるため、対応する点は $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ である。

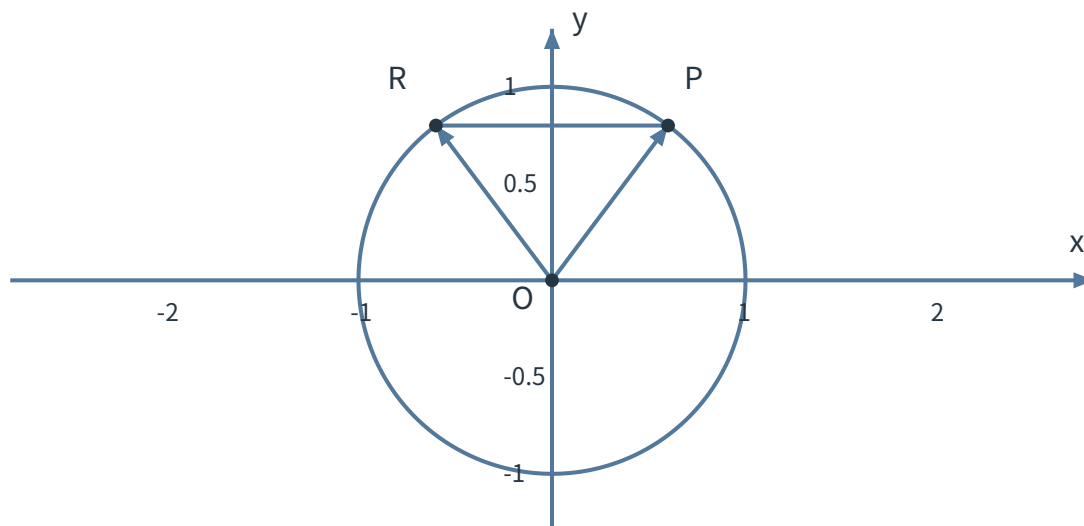


図3 y 軸対称による θ と $\pi - \theta$ の対応

したがって、 $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$ 、 $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ である。また、 $\cos \theta \neq 0$ のとき $\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$ である。

$\theta + \pi$ は原点について対称

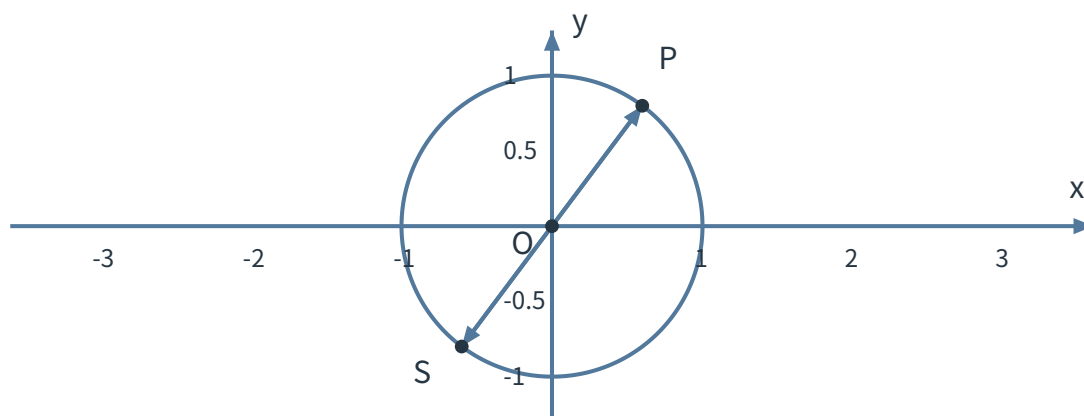


図4 原点についての中心対称による θ と $\theta + \pi$ の対応

角を π だけ増やすと、単位円上では半周する。したがって、 $P = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ に対し、角 $\theta + \pi$ に対応する点は原点について対称な $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ である。
 x 座標も y 座標も反対符号になるため、 $\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$ 、 $\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$ である。

また、 $\cos \theta \neq 0$ のときは分子と分母がともに反対符号になるので、 $\tan(\theta + \pi) = \tan \theta$ である。

単位円で対称性を見る

単位円上の点 $(\cos \theta, \sin \theta)$ を基準にすると、次のように判断できる。

- $-\theta$: x 軸について対称なので、 x はそのまま、 y は反対符号である。
- $\pi - \theta$: y 軸について対称なので、 x は反対符号、 y はそのままである。
- $\theta + \pi$: 原点について対称なので、 x も y も反対符号である。

式だけを別々に暗記するよりも、単位円上でどの座標が変わるかを考えると再現しやすい。

2π だけ進むと同じ位置へ戻る

角 θ から 2π だけ進むと単位円をちょうど 1 周し、終辺はもとの位置へ戻る。したがって、対応する点の座標も変わらない。

よって、 $\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta$ 、 $\cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta$ である。

4. 例題

例題 1

第 2 象限の角 θ について、 $\sin \theta = \frac{3}{5}$ である。 $\cos \theta$ と $\tan \theta$ を求めよ。

例題 1 の解答・解説

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より、 $\cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$ である。したがって、 $\cos \theta = \pm \frac{4}{5}$ である。

θ は第 2 象限の角なので、対応する点は単位円の左半分にあり、 $\cos \theta < 0$ である。よって、 $\cos \theta = -\frac{4}{5}$ である。

また、 $\cos \theta = -\frac{4}{5} \neq 0$ なので正接を求めることができる。

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

したがって、 $\cos \theta = -\frac{4}{5}$ 、 $\tan \theta = -\frac{3}{4}$ である。

例題 2

第 3 象限の角 θ について、 $\cos \theta = -\frac{12}{13}$ である。 $\sin \theta$ と $\tan \theta$ を求めよ。

例題 2 の解答・解説

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より、 $\sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25}{169}$ である。したがって、 $\sin \theta = \pm \frac{5}{13}$ である。

第 3 象限では単位円上の点の y 座標が負なので、 $\sin \theta = -\frac{5}{13}$ である。

また、 $\cos \theta = -\frac{12}{13} \neq 0$ なので、

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$$

となる。したがって、 $\sin \theta = -\frac{5}{13}$ 、 $\tan \theta = \frac{5}{12}$ である。

例題 3

第 1 象限の角 θ について、 $\cos \theta = \frac{3}{5}$ 、 $\sin \theta = \frac{4}{5}$ である。

- (1) $-\theta$ の正弦・余弦を求めよ。
- (2) $\pi - \theta$ の正弦・余弦を求めよ。
- (3) $\theta + \pi$ の正弦・余弦を求めよ。

例題 3 の解答・解説

(1) $-\theta$ では、単位円上の点を x 軸について対称に移す。したがって、 x 座標は変わらず、 y 座標だけが反対符号になる。

よって、 $\cos(-\theta) = \frac{3}{5}$ 、 $\sin(-\theta) = -\frac{4}{5}$ である。

(2) $\pi - \theta$ では、単位円上の点を y 軸について対称に移す。したがって、 x 座標だけが反対符号になる。

よって、 $\cos(\pi - \theta) = -\frac{3}{5}$ 、 $\sin(\pi - \theta) = \frac{4}{5}$ である。

(3) $\theta + \pi$ では、単位円上の点を原点について対称に移す。したがって、 x 座標も y 座標も反対符号になる。

よって、 $\cos(\theta + \pi) = -\frac{3}{5}$ 、 $\sin(\theta + \pi) = -\frac{4}{5}$ である。

5. 演習問題**演習 1**

第 2 象限の角 θ について、 $\sin \theta = \frac{5}{13}$ である。 $\cos \theta$ と $\tan \theta$ を求めよ。

演習 2

第 4 象限の角 θ について、 $\cos \theta = \frac{7}{25}$ である。 $\sin \theta$ と $\tan \theta$ を求めよ。

演習 3

第 3 象限の角 θ について、 $\sin \theta = -\frac{8}{17}$ である。 $\cos \theta$ と $\tan \theta$ を求めよ。

演習 4

$\cos \theta = 0$ であるとする。

- (1) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ は使えるか。
- (2) $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ によって $\tan \theta$ の値を定めることができるか。
- (3) $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ は使えるか。

演習 5

第 2 象限の角 θ について、 $\cos \theta = -\frac{5}{13}$ 、 $\sin \theta = \frac{12}{13}$ である。 $\cos(-\theta)$ 、 $\sin(-\theta)$ 、 $\tan(-\theta)$ を求めよ。

演習 6

第 4 象限の角 θ について、 $\cos \theta = \frac{8}{17}$ 、 $\sin \theta = -\frac{15}{17}$ である。 $\cos(\pi - \theta)$ 、 $\sin(\pi - \theta)$ 、 $\tan(\pi - \theta)$ を求めよ。

演習 7

第 2 象限の角 θ について、 $\cos \theta = -\frac{7}{25}$ 、 $\sin \theta = \frac{24}{25}$ である。 $\cos(\theta + \pi)$ 、 $\sin(\theta + \pi)$ 、 $\tan(\theta + \pi)$ を求めよ。

演習 8

- (1) $\sin \theta = -\frac{3}{5}$ 、 $\cos \theta = \frac{4}{5}$ のとき、 $\sin(\theta + 2\pi)$ と $\cos(\theta + 2\pi)$ を求めよ。
 (2) ある角 ϕ について $\cos \phi = \frac{6}{5}$ となることはあるか。理由も答えよ。

6. 演習の解答・解説**演習 1 の解答・解説**

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より、 $\cos^2 \theta = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$ なので、 $\cos \theta = \pm \frac{12}{13}$ である。

第 2 象限では x 座標が負なので、 $\cos \theta = -\frac{12}{13}$ である。

また、 $\cos \theta \neq 0$ なので、 $\tan \theta = \frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12}$ となる。したがって、 $\cos \theta = -\frac{12}{13}$ 、 $\tan \theta = -\frac{5}{12}$ である。

演習 2 の解答・解説

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より、 $\sin^2 \theta = 1 - \frac{49}{625} = \frac{576}{625}$ なので、 $\sin \theta = \pm \frac{24}{25}$ である。

第 4 象限では y 座標が負なので、 $\sin \theta = -\frac{24}{25}$ である。

$\cos \theta = \frac{7}{25} \neq 0$ であるから、 $\tan \theta = \frac{-\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}} = -\frac{24}{7}$ となる。したがって、 $\sin \theta = -\frac{24}{25}$ 、 $\tan \theta = -\frac{24}{7}$ である。

演習 3 の解答・解説

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より、 $\cos^2 \theta = 1 - \frac{64}{289} = \frac{225}{289}$ なので、 $\cos \theta = \pm \frac{15}{17}$ である。

第 3 象限では x 座標が負なので、 $\cos \theta = -\frac{15}{17}$ である。

$\cos \theta \neq 0$ であるため、 $\tan \theta = \frac{-\frac{8}{17}}{-\frac{15}{17}} = \frac{8}{15}$ となる。したがって、 $\cos \theta = -\frac{15}{17}$ 、 $\tan \theta = \frac{8}{15}$ である。

演習 4 の解答・解説

- (1) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ は、すべての角 θ について成り立つので使える。
- (2) $\cos \theta = 0$ では $\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ の分母が 0 になる。したがって、この式によって $\tan \theta$ を定めることはできず、 $\tan \theta$ は定義されない。
- (3) $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ は $\cos \theta \neq 0$ のときに導いた関係式である。 $\cos \theta = 0$ では右辺も定義されないため使えない。

演習 5 の解答・解説

$-\theta$ に対応する点は、 θ に対応する点を x 軸について対称に移した点である。

したがって、 $\cos(-\theta) = -\frac{5}{13}$ 、 $\sin(-\theta) = -\frac{12}{13}$ である。

また、 $\cos(-\theta) = -\frac{5}{13} \neq 0$ なので、 $\tan(-\theta) = \frac{-\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}} = \frac{12}{5}$ である。

演習 6 の解答・解説

$\pi - \theta$ に対応する点は、 θ に対応する点を y 軸について対称に移した点である。

したがって、 $\cos(\pi - \theta) = -\frac{8}{17}$ 、 $\sin(\pi - \theta) = -\frac{15}{17}$ である。

また、 $\cos(\pi - \theta) = -\frac{8}{17} \neq 0$ なので、 $\tan(\pi - \theta) = \frac{-\frac{15}{17}}{-\frac{8}{17}} = \frac{15}{8}$ である。

演習 7 の解答・解説

$\theta + \pi$ に対応する点は、 θ に対応する点を原点について対称に移した点である。

したがって、 $\cos(\theta + \pi) = \frac{7}{25}$ 、 $\sin(\theta + \pi) = -\frac{24}{25}$ である。

また、 $\cos(\theta + \pi) = \frac{7}{25} \neq 0$ なので、 $\tan(\theta + \pi) = \frac{-\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}} = -\frac{24}{7}$ である。

演習 8 の解答・解説

(1) 2π だけ角を増やすと単位円を 1 周して同じ終辺へ戻るため、対応する点の座標は変わらない。

したがって、 $\sin(\theta + 2\pi) = -\frac{3}{5}$ 、 $\cos(\theta + 2\pi) = \frac{4}{5}$ である。

(2) $\cos \phi$ は単位円上の点の x 座標であり、その値域は $-1 \leq \cos \phi \leq 1$ である。 $\frac{6}{5} > 1$ なので、 $\cos \phi = \frac{6}{5}$ となる角 ϕ は存在しない。