

第 120 講 対数とは何か

学習目標

対数を指数の逆向きの見方として理解し、 $a^p = M$ と $\log_a M = p$ の関係を使って指数表示と対数表示を変換できるようになる。

また、対数が定義できる条件を判断し、底や真数の条件を理由とともに説明できるようになる。

対数は指数の名前である

指数では、ある数を何乗すると目的の値になるかを考える。

例えば、 $2^3 = 8$ では、「2 を 3 乗すると 8 になる」と表している。このとき、指数の 3 は 8 を作るための指数の値である。

対数は、この指数を答えとして取り出す表現である。

底 a と真数 M が $a > 0$, $a \neq 1$, $M > 0$ を満たすとき、 $a^p = M$ と $\log_a M = p$ は同じ関係を表す。

つまり、対数とは「ある正の数を底の何乗で表せるかという指数の名前」である。

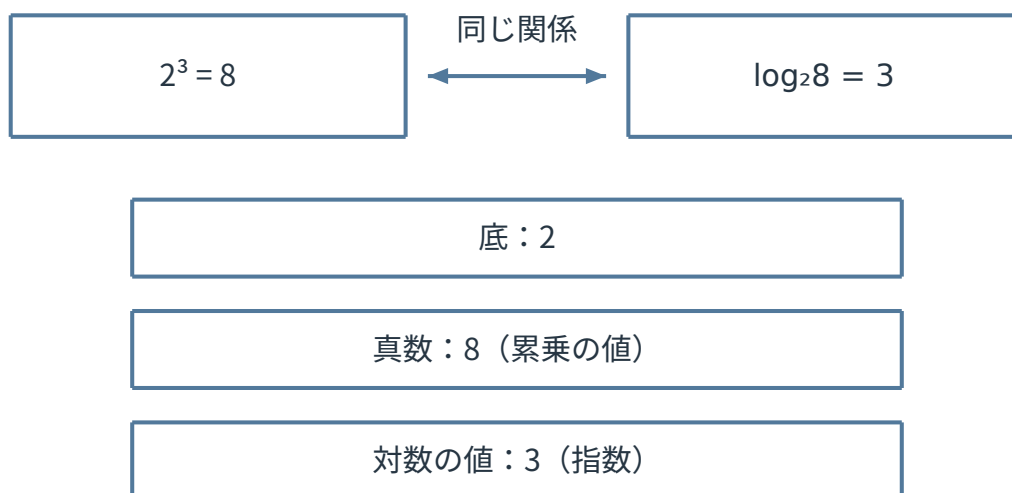


図 1 $2^3 = 8$ と $\log_2 8 = 3$ は同じ関係を表す。底は 2、真数は 8 (累乗の値)、対数の値は 3 (指数)。対数は、与えられた真数になる指数を答える。

対数の定義

a を底、 M を真数、 p を対数の値という。

ただし、実数の範囲で対数を考えるためには、 $a > 0$, $a \neq 1$, $M > 0$ を満たす必要がある。

この条件のもとで、 $a^p = M$ を満たす実数 p がただ 1 つ存在するとき、 $\log_a M = p$ と定める。

なぜ対数の値は 1 つに決まるのか

指数関数 $y = a^x$ の性質から、対数の意味を確認する。

底 a が $a > 1$ のとき、指数関数 $y = a^x$ は連続で、常に増加する。そのため、同じ値 M に到達する指数は 1 つしかない。

また、 $0 < a < 1$ のときは指数関数 $y = a^x$ は連続で、常に減少する。この場合も、同じ値 M に到達する指数は 1 つしかない。

さらに、指数関数の値域は正の数全体であるため、 $M > 0$ のときだけ、ある実数 p が存在して $a^p = M$ と表せる。

したがって、条件 $a > 0$, $a \neq 1$, $M > 0$ のもとでは、実数 p が存在し、しかもただ 1 つに決まる。

底の条件と真数の条件

実数の対数を考えるためには、底と真数に条件がある。

底 a については、 $a > 0$, $a \neq 1$ でなければならない。

まず、 $a = 1$ の場合を考えると、 $1^p = 1$ であり、指数 p を変えても値は変化しない。

そのため、 $M = 1$ ではすべての実数 p が成り立ち、指数が一意に決まらない。また、 $M \neq 1$ では解が存在しない。

次に、 $a = 0$ は底にできない。

0^p は、 $p < 0$ のとき分母に 0 を含む形となるため定義できない。また、 $p = 0$ の場合の 0^0 は、本講で扱う実数指数の範囲では定義しない。

したがって、0 を底とする指数関数を実数全体で扱うことはできない。

また、負の底も実数全体の指数関数として扱えない。

例えば、 $(-2)^{\frac{1}{2}}$ は、 $\sqrt{-2}$ を意味するため、実数では存在しない。

このように、指数関数を実数全体で扱うには底を正の数に限定する必要がある。

さらに、真数 M は正でなければならない。

$M \leq 0$ の場合、正の底を持つ指数関数の値域に含まれないため、実数の対数の対象外となる。

対数を読むときの基準

対数では、まず指数の形へ戻す。

$\log_a M = p$ を見たら、 $a^p = M$ と読み替える。

計算の公式を先に覚えるのではなく、「底を何乗すると真数になるか」を考えることが対数の基本である。

対数の値の正負

対数の値は、正の数だけになるわけではない。

例えば、 $2^3 = 8$ なので、 $\log_2 8 = 3$ である。

一方で、 $2^{-3} = \frac{1}{8}$ なので、 $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ となる。

また、 $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ であるから、 $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$ となる。

つまり、対数の値には負数や分数も現れる。

基本的な 2 つの値

定義から、次の 2 つの関係が分かる。

まず、 $a^0 = 1$ であるため、 $\log_a 1 = 0$ である。

また、 $a^1 = a$ であるため、 $\log_a a = 1$ である。

これらは公式として暗記するだけでなく、対数の定義へ戻れば確認できる。

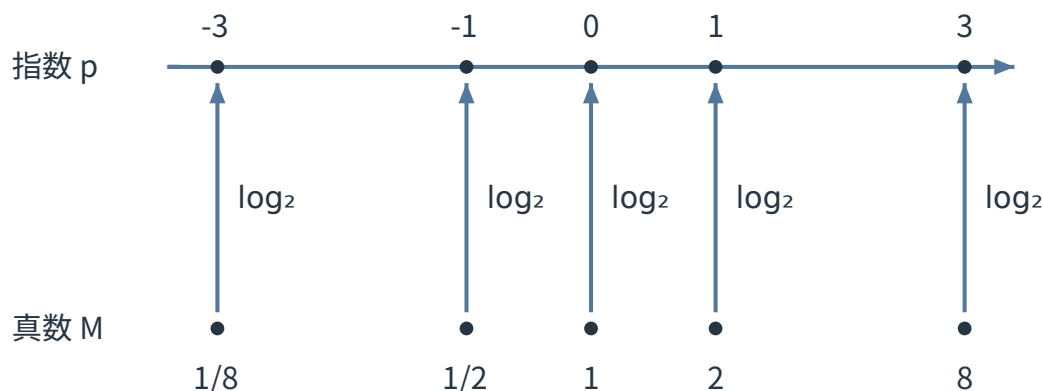


図2 上段は指数 p の数直線。下段は真数 M の対応表であり、 M の差を間隔で表す数直線ではない。上向き矢印 $\log_2$ は、真数 M から対応する指数 p を求める向きを示す。

底による正負の変化

$a > 1$ の場合、指数を大きくすると a^p は大きくなる。

そのため、 $M > 1$ ならば、 $\log_a M > 0$ となり、 $0 < M < 1$ ならば、 $\log_a M < 0$ となる。

一方、 $0 < a < 1$ の場合は指数を大きくすると a^p は小さくなる。そのため、正負の対応が逆になる。

$M > 1$ ならば、 $\log_a M < 0$ であり、 $0 < M < 1$ ならば、 $\log_a M > 0$ となる。

底が 1 より大きいのか、1 より小さいかを見ることが、対数の符号を判断する基準になる。

指数のグラフを逆に読む

対数は指数の値を探す考え方である。

例えば、 $\log_2 8$ を考えるとき、指数関数 $M = 2^p$ のグラフ上で、 $M = 8$ となる指数 p を探している。

このとき、横軸は指数 p 、縦軸は値 M を表す。

水平線 $M = 8$ との交点を考えると、指数関数は厳密に増加するため交点は 1 つだけである。

その交点は、 $(3, 8)$ である。

したがって、横座標の値 3 を読むことで、 $\log_2 8 = 3$ と分かる。

この段階では、対数関数のグラフを考えるのではなく、既習の指数関数から「どの指数でその値になるか」を読み取ることが重要である。

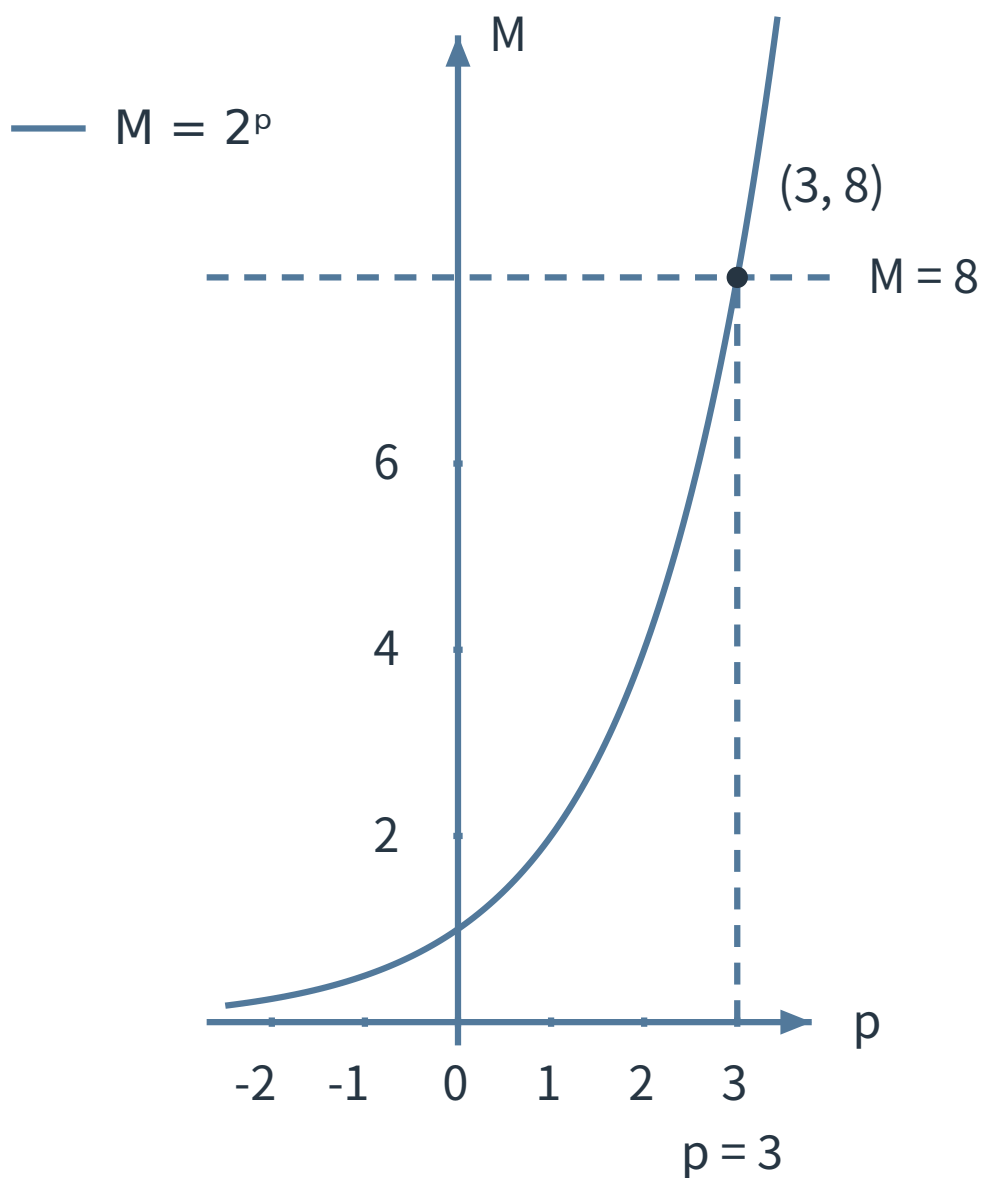


図3 実線は既知の指数関数 $M = 2^p$ 、破線は $M = 8$ 。交点 (3, 8) の横座標を読み取り、 $\log_2 8 = 3$ を得る。曲線の定義域は実数全体で、図はその一部。表示窓の端には点を付けない。

指数表示と対数表示の変換

次の等式を対数表示に直しなさい。

$$3^4 = 81$$

例題 1 の解答・解説

対数は「底を何乗すると真数になるか」を表す。

$a^p = M$ を $\log_a M = p$ へ変換する。

ここでは、 $3^4 = 81$ なので、底は 3、真数は 81、指数は 4 である。

したがって、 $\log_3 81 = 4$ となる。

負や分数を含む対数値

次の値を求めなさい。

(1) $\log_2 \frac{1}{8}$

(2) $\log_4 2$

例題 2 の解答・解説

対数は定義へ戻して考える。

(1) $\log_2 \frac{1}{8} = p$ とおくと、 $2^p = \frac{1}{8}$ である。

ここで、 $\frac{1}{8} = 2^{-3}$ なので、 $2^p = 2^{-3}$ となる。

底 2 は $2 > 0$ 、 $2 \neq 1$ を満たすため、指数は一意に決まる。

したがって、 $p = -3$ であり、 $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ となる。

(2) $\log_4 2 = p$ とおくと、 $4^p = 2$ である。

ここで、 $4 = 2^2$ より、 $(2^2)^p = 2$ となる。

したがって、 $2^{2p} = 2^1$ である。

底 4 は $4 > 0$ 、 $4 \neq 1$ を満たすため、指数は一意に決まる。

よって、 $2p = 1$ より、 $p = \frac{1}{2}$ である。

したがって、 $\log_4 2 = \frac{1}{2}$ となる。

対数が定義できる条件

次の対数が実数の範囲で定義できるか答え、理由を説明しなさい。

$\log_{-2} 8$

例題 3 の解答・解説

実数の対数では、底について $a > 0$ 、 $a \neq 1$ が必要である。

この対数では底が $a = -2$ であり、正の数ではない。

したがって、条件 $a > 0$ を満たさない。

よって、 $\log_{-2} 8$ は実数の対数として定義できない。

指数表示と対数表示の変換

次の等式を対数表示に直しなさい。

$5^3 = 125$

対数表示から指数表示への変換

次の等式を指数表示に直しなさい。

$\log_3 81 = 4$

負の対数値

次の値を求めなさい。

$\log_4 \frac{1}{16}$

分数の指数を利用した対数値

次の値を求めなさい。

$$\log_9 3$$

底が 1 より小さい場合の対数

次の値を求めなさい。

$$\log_{\frac{1}{2}} 8$$

対数が定義できる条件

次の対数が実数の範囲で定義できるか答え、理由を説明しなさい。

$$\log_5 (-2)$$

底 1 が不適切な理由

次の説明の誤りを指摘し、正しい理由を述べなさい。

「 $\log_1 4$ は、1 を何乗すると 4 になるかを考えればよいので、指数を探せばよい。」

定義に戻って判断する対数

次の問いに答えなさい。

$\log_2 M = 4$ であるとき、 M の値を求めなさい。また、この式が対数として成立する理由を説明しなさい。

練習問題 1 の解答・解説

対数は指数の値を読む表現である。

$a^p = M$ を $\log_a M = p$ へ変換する。

ここでは、 $5^3 = 125$ なので、底は 5、真数は 125、指数は 3 である。

したがって、 $\log_5 125 = 3$ となる。

練習問題 2 の解答・解説

対数表示を指数表示へ戻す。

$\log_a M = p$ は、 $a^p = M$ を意味する。

したがって、 $\log_3 81 = 4$ は、 $3^4 = 81$ を表す。

よって、指数表示は $3^4 = 81$ である。

練習問題 3 の解答・解説

定義に戻して考える。

$\log_4 \frac{1}{16} = p$ とおくと、 $4^p = \frac{1}{16}$ である。

ここで、 $\frac{1}{16} = 4^{-2}$ だから、 $4^p = 4^{-2}$ となる。

指数が等しいので、 $p = -2$ である。

したがって、 $\log_4 \frac{1}{16} = -2$ となる。

練習問題 4 の解答・解説

定義から、 $\log_9 3 = p$ とおくと、 $9^p = 3$ である。

ここで、 $9 = 3^2$ だから、 $(3^2)^p = 3$ となる。

指数法則より、 $3^{2p} = 3^1$ である。

したがって、 $2p = 1$ より、 $p = \frac{1}{2}$ となる。

よって、 $\log_9 3 = \frac{1}{2}$ である。

練習問題 5 の解答・解説

定義へ戻す。

$\log_{\frac{1}{2}} 8 = p$ とおくと、 $(\frac{1}{2})^p = 8$ である。

ここで、 $\frac{1}{2} = 2^{-1}$ なので、 $(2^{-1})^p = 2^3$ となる。

指数法則より、 $2^{-p} = 2^3$ である。

したがって、 $-p = 3$ より、 $p = -3$ となる。

よって、 $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$ である。

底が 1 より小さい場合、値の大小関係と指数の正負の対応が逆になることが確認できる。

練習問題 6 の解答・解説

実数の対数では、真数について $M > 0$ が必要である。

この問題では真数が $M = -2$ であり、正の数ではない。

指数関数 $y = 5^x$ の値は常に正であるため、負の数になることはない。

したがって、 $\log_5 (-2)$ は実数の範囲では定義できない。

練習問題 7 の解答・解説

誤りは、底が 1 の場合でも指数を 1 つ探せると考えている点である。

対数の定義では、底について $a > 0$, $a \neq 1$ が必要である。

底を 1 にすると、 $1^p = 1$ となり、指数 p をどのように変えても値は 1 のままである。

そのため、 $1^p = 4$ を満たす実数 p は存在しない。

また、 $1^p = 1$ の場合でもすべての実数 p が成り立つため、指数が一意に決まらない。

したがって、 $\log_1 4$ は実数の対数として定義できない。

練習問題 8 の解答・解説

対数の定義へ戻す。

$\log_2 M = 4$ は、 $2^4 = M$ を意味する。

したがって、 $M = 16$ である。

また、底について $2 > 0$, $2 \neq 1$ を満たしている。

さらに真数は $M = 16 > 0$ である。

よって、この対数は実数の範囲で定義でき、定義に従って値が決まる。