第 186 講 積の微分

学習目標

学習目標

- 2 つの関数の積の変化を、一方ずつ変化させた 2 項へ分けて考えられる。
- 微分係数の定義から、積の微分公式 $F'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$ を導ける。
- 導関数の公式 $(fg)'=f'g+fg'$ を使って積を微分できる。
- $(fg)'$ と $f'g'$ の違いを説明できる。
- 3 つの関数の積を、2 つの関数の積へまとめることで微分できる。

積全体の変化を 2 つに分ける

一方ずつ変化させる

2 つの関数 f,g の積を $F=fg$ とする。
$x=a$ では積は $f(a)g(a)$ である。
$x=a+h$ では積は $f(a+h)g(a+h)$ へ変化する。
この差をそのまま眺めると、f と g が同時に変化しているため扱いにくい。そこで、途中に $f(a)g(a+h)$ を入れて、一方ずつ変化させる。

$$\begin{aligned}F(a+h)-F(a)&=f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)\\&=f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a+h)\\&\quad+f(a)g(a+h)-f(a)g(a)\\&=\{f(a+h)-f(a)\}g(a+h)\\&\quad+f(a)\{g(a+h)-g(a)\}\end{aligned}$$

積全体の変化が、「f の変化による部分」と「g の変化による部分」の和に分かれたのである。この恒等分解が積の微分の中心である。
$f(a),g(a)$ がともに正であり、さらに両方の増分が正である場合には、長方形の縦と横が伸びるときの面積増加として考える補助イメージを持てる。このとき、面積の増加は 2 本の帯に分けて捉えられる。
ただし、この面積の見方は正の辺で増分も正の場合に限った補助的な説明である。増分が負の場合や関数値が負の場合でも、積の変化を分ける恒等式と差分商による証明はそのまま有効である。

積の微分公式

積の微分

点 a を含む開区間で定義された実数値関数 f,g が a で微分可能であるならば、$F=fg$ も a で微分可能であり、その微分係数は次の式で求められる。

$$F'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$$

f,g がともに微分可能な各点で、次の公式が成立する。

$$(fg)'=f'g+fg'$$

©ミライコーチング

微分係数の定義から導く

$h \neq 0$ かつ $a+h$ が定義域内にあるとする。先ほどの恒等分解を差分商へ用いると、次の式を得る。

$$\frac{F(a+h)-F(a)}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}g(a+h) + f(a)\frac{g(a+h)-g(a)}{h}$$

f と g の微分係数はともに有限な値として存在し、次の 2 式が成り立つ。

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h} = g'(a)$$

g は a で連続なので、次の極限式が成り立つ。

$$\lim_{h\to 0} g(a+h) = g(a)$$

したがって、差分商の式で現れる各極限が有限に定まり、積の差分商にも有限な極限が存在する。

$$\begin{aligned} F'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{F(a+h)-F(a)}{h} \\ &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \end{aligned}$$

よって、$F = fg$ は a で微分可能である。
この証明では $f(a), g(a)$ で割る操作をしていないため、$f(a)=0$ や $g(a)=0$ の場合でも有効である。

積は 2 項へ分けて微分する

積 fg を微分するときは、両方を同時に微分するのではない。
「f だけを微分して g はそのまま」と「g だけを微分して f はそのまま」の 2 項を足すのである。

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$(fg)'$ と $f'g'$ は異なる

両方を同時に微分しない

$f(x) = x,\ g(x) = x$ とする。このとき積は $F(x) = x^2$ である。
次の図の縦軸は、積そのものの値 $F(x)$ を表す。点 P は $x=1$ における $F(1)=1$ を表す。

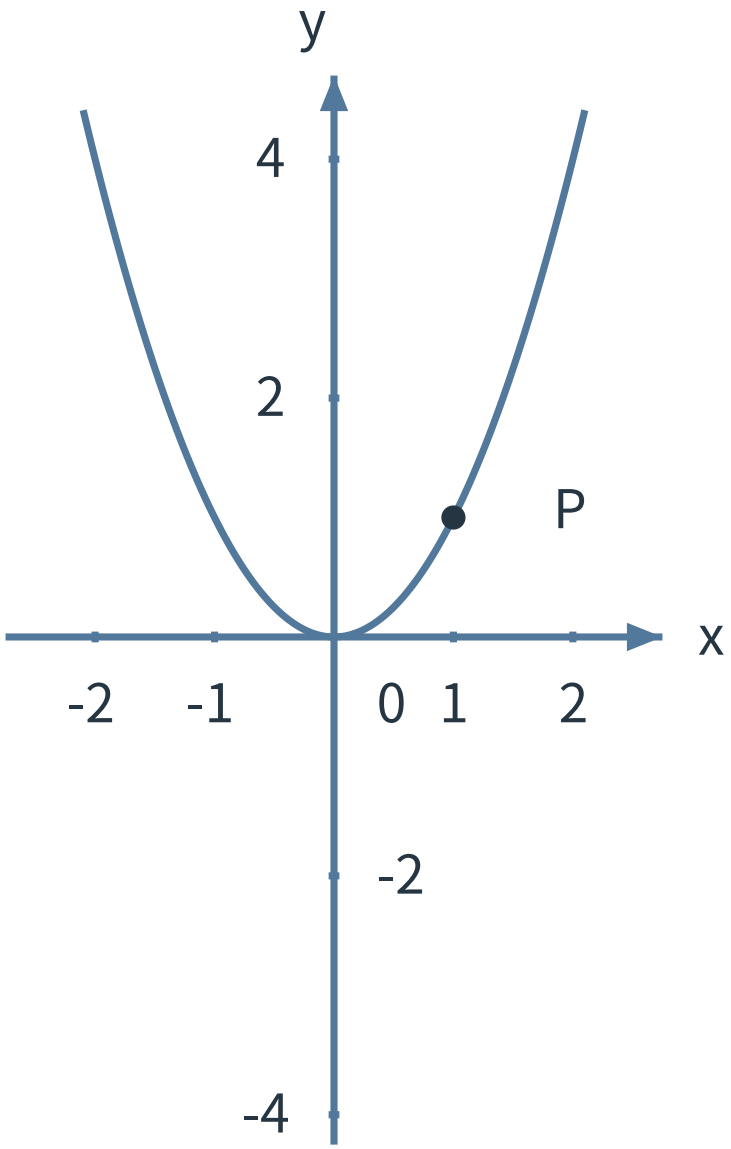

図 1　積 $F(x) = x^2$ のグラフ

一方、$F'(x) = 2x$ である。次の図の縦軸は関数値 $F(x)$ ではなく、その点における傾き $F'(x)$ を表す。点 Q は $x = 1$ における $F'(1) = 2$ を表す。

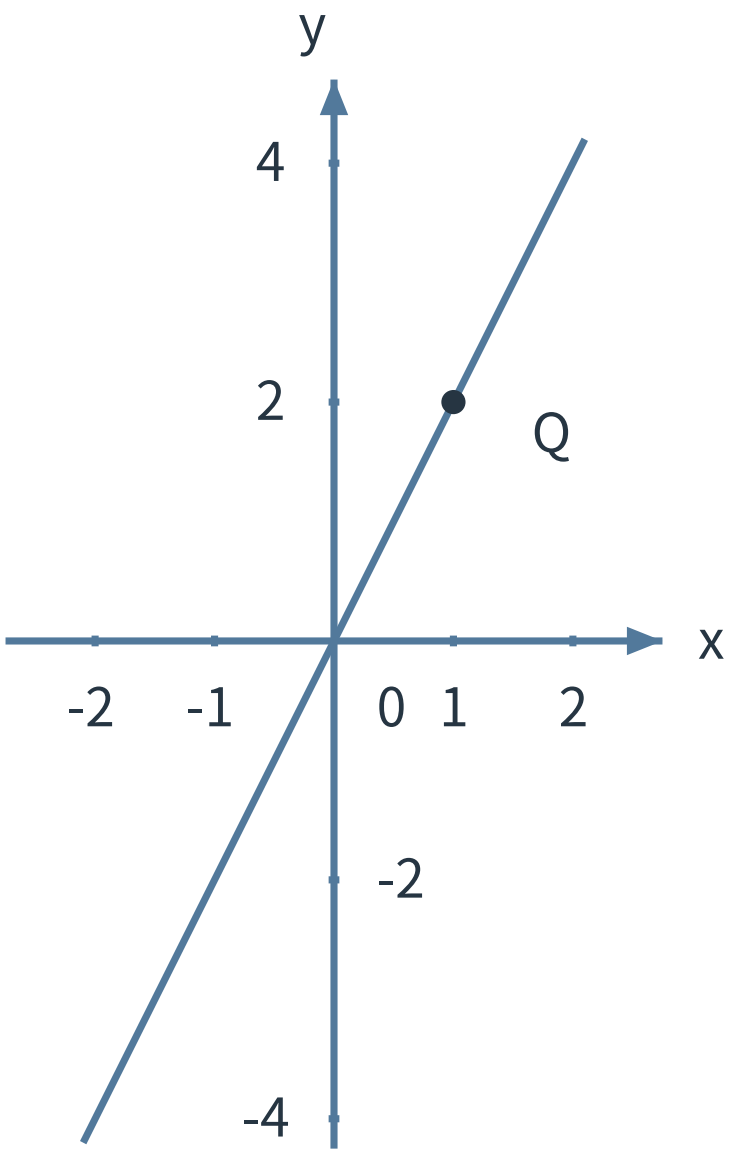

図 2　導関数 $F'(x) = 2x$ のグラフ

2 図は座標軸の範囲と目盛をそろえ、各グラフの一部を表示している。
この 2 図では縦軸が表す量そのものが異なる。第 1 図は積の値、第 2 図は積の変化の速さである。
ここで $f'(x) = 1,\ g'(x) = 1$ なので、$f'(x)g'(x) = 1$ である。しかし $(fg)' = 2x$ であり、たとえば $x = 1$ では $(fg)' = 2$ に対して $f'g' = 1$ である。
したがって、積を微分して $f'g'$ とすることはできない。

よく使う形

f^2 の微分

f が対象点で微分可能であり、f^2 は $f \cdot f$ という積であるため、積の微分公式を適用できる。

$$\begin{aligned}(f^2)' &= (ff)' \\ &= f'f + ff' \\ &= 2ff'\end{aligned}$$

これは積の微分から得られる結果であり、合成関数の一般的な微分公式を使ったものではない。

3 つの関数の積

3 つの関数 u, v, w が同じ点で微分可能であるとする。3 つの関数の積も、新しい公式として覚える必要はなく、2 因子の積の微分を繰り返して求められる。

$$\begin{aligned}(uvw)' &= ((uv)w)' \\ &= (uv)'w + (uv)w' \\ &= (u'v + uv')w + uvw' \\ &= u'vw + uv'w + uvw'\end{aligned}$$

したがって、3 因子の場合も、1 つだけを微分して残りをそのままにした項を足す形になる。

例題 1

例題 1

$F(x) = (x-1)(x+2)$ の導関数を求め、$F'(1)$ を求めよ。また、積を展開してから微分した結果とも照合せよ。

例題 1 の解答・解説

積の形を保ったまま微分する。$x-1$ と $x+2$ の導関数はいずれも 1 なので、次のように計算できる。

$$\begin{aligned}F'(x) &= 1 \cdot (x+2) + (x-1) \cdot 1 \\ &= x + 2 + x - 1 \\ &= 2x + 1\end{aligned}$$

したがって、$F'(1) = 3$ である。
展開による検算では、次の式を用いる。

$$\begin{aligned}F(x) &= (x-1)(x+2) \\ &= x^2 + x - 2\end{aligned}$$

既習の多項式の微分から $F'(x) = 2x + 1$ となり、積の微分による結果と一致する。
また、$F(1) = 0$ であるが、$F'(1) = 3$ である。関数値が 0 であることと、その点でグラフの傾きが 0 であることは別の事柄である。
次の図では、$F(x) = x^2 + x - 2$ と、$x = 1$ における傾き 3 の接線 $y = 3x - 3$ を比較している。点 A が接点 $(1, 0)$ である。

実線は $F(x) = x^2 + x - 2$ のグラフ、破線は接線 $y = 3x - 3$ である。

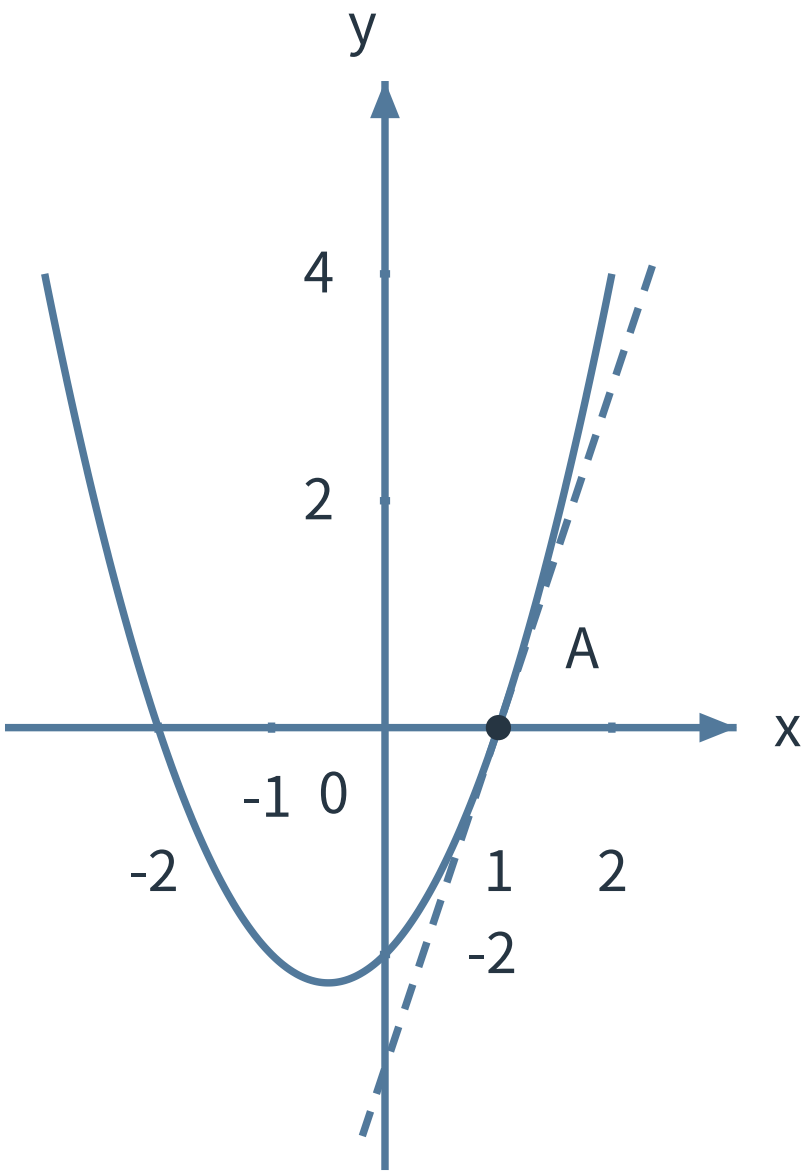

図 3　$F(x) = x^2 + x - 2$ と $x = 1$ における接線 $y = 3x - 3$

$F(1) = 0$ は接点が x 軸上にあることを表す。一方、$F'(1) = 3$ はその点での傾きを表すため、両者が同時に成り立っても矛盾しない。

例題 2

例題 2

点 2 を含む開区間で定義された実数値関数 f, g が 2 で微分可能である。
$f(2)=3$、$f'(2)=-1$、$g(2)=-2$、$g'(2)=4$ を満たす。
$F=fg$ とするとき、$F(2)$ と $F'(2)$ を求めよ。また、与えられた一点のデータだけでこれらを決められる理由を説明せよ。

例題 2 の解答・解説

積の値は、その点での 2 つの関数値から求められる。したがって、$F(2)=f(2)g(2)=3\cdot(-2)=-6$ である。
積の微分公式を用いて、次のように計算できる。

$$\begin{aligned} F'(2) &= f'(2)g(2)+f(2)g'(2) \\ &= (-1)(-2)+3\cdot 4 \\ &= 2+12 \\ &= 14 \end{aligned}$$

よって、$F(2)=-6,\ F'(2)=14$ である。
積の微分公式で $x=2$ に必要なのは、$f(2), g(2)$ という関数値と、$f'(2), g'(2)$ というその点での微分係数だけである。そのため、$f(x), g(x)$ の式全体が与えられていなくても、この 4 つの一点データから $F(2)$ と $F'(2)$ を決められる。

例題 3

例題 3

$y=(x-1)(x+1)(x+2)$ の導関数を、3 因子の積の公式を用いて求めよ。また、もとの式を展開してから微分し、結果が一致することを確かめよ。

例題 3 の解答・解説

3 因子の積では、1 つずつ微分した 3 項を足す。
$u=x-1$、$v=x+1$、$w=x+2$ とおく。
このとき、$u'=v'=w'=1$ である。
3 因子の積の公式を用いると、導関数は次のように表される。

$$\begin{aligned} y' &= (x+1)(x+2) \\ &\quad +(x-1)(x+2) \\ &\quad +(x-1)(x+1) \end{aligned}$$

各項を展開して整理すると、次の式を得る。

$$\begin{aligned} y' &= \left(x^2+3x+2\right)+\left(x^2+x-2\right)+\left(x^2-1\right) \\ &= 3x^2+4x-1 \end{aligned}$$

もとの式は、次のように展開できる。

$$\begin{aligned} y &= \left(x^2-1\right)(x+2) \\ &= x^3+2x^2-x-2 \end{aligned}$$

既習の多項式の微分を用いると、$y'=3x^2+4x-1$ となり、3 因子の積として微分した結果と一致する。
3 因子の公式も独立した公式ではなく、2 因子の積の微分を繰り返した結果である。

演習問題

練習問題 1

$y=(x^2+1)(x-3)$ の導関数を求めよ。

練習問題 2

$F(x)=(x-2)(x+5)$ とする。$F'(2)$ を求めよ。また、$F(2)=0$ であっても $F'(2)$ を求められる理由を説明せよ。

練習問題 3

点 1 を含む開区間で定義された実数値関数 f, g が 1 で微分可能である。
$f(1)=2$、$f'(1)=3$、$g(1)=4$、$g'(1)=-1$ を満たす。
$F=fg$ とするとき、$F(1)$ と $F'(1)$ を求めよ。

練習問題 4

$y=(x+1)^2$ の導関数を、同じ因子の積として考えて求めよ。

練習問題 5

$y=(x-1)(x+2)(x+4)$ の導関数を求めよ。

練習問題 6

点 0 を含む開区間で定義された実数値関数 f, g が、0 で微分可能であるとする。
$F=fg$ とし、$f(0)=5,\ g(0)=3,\ g'(0)=6,\ F'(0)=24$ が成り立つとき、$f'(0)$ を求めよ。

練習問題 7

実数全体で定義された関数 f, g を $f(x)=|\,x\,|,\ g(x)=|\,x\,|$ とおき、$F(x)=f(x)g(x)$ とする。
(1) f, g が $x=0$ で微分可能でないことを確認せよ。
(2) $F(x)$ を簡単な式で表し、F が $x=0$ で微分可能であることを微分係数の定義から確認せよ。
(3) この例から、積の微分公式を使うために必要な条件を説明せよ。

練習問題 8

点 a を含む開区間で定義された実数値関数 f, g が a で微分可能であり、$F=fg$ とする。$h\neq 0$ かつ $a+h$ がその区間内にあるとき、次の差分商を、f の差分商と g の差分商を含む 2 項の和に変形せよ。

$$\frac{F(a+h)-F(a)}{h}$$

演習問題の解答・解説

練習問題 1 の解答・解説

積の微分公式を使う。

$$\begin{aligned} y' &= \left(x^2+1\right)'(x-3)+\left(x^2+1\right)(x-3)' \\ &= 2x(x-3)+\left(x^2+1\right) \\ &= 3x^2-6x+1 \end{aligned}$$

したがって、導関数は $y'=3x^2-6x+1$ である。

練習問題 2 の解答・解説

$x-2$ と $x+5$ の積として考える。

$$\begin{aligned} F'(x) &= 1\cdot(x+5)+(x-2)\cdot 1 \\ &= 2x+3 \end{aligned}$$

よって、$F'(2)=7$ である。
また、$F(2)=0$ であるが、積の値が 0 であることと、その点での変化の割合が 0 であることは別である。微分係数は周囲での変化を表すため、関数値だけから判断することはできない。
両因子が微分可能であり、積の微分公式では因子の値で割る操作を行わないため、$F(2)=0$ であっても公式をそのまま適用できる。

練習問題 3 の解答・解説

積の値は関数値の積で求める。
$F(1)=f(1)g(1)=2\cdot 4=8$ である。
微分係数は積の微分公式を使う。

$$\begin{aligned} F'(1) &= f'(1)g(1)+f(1)g'(1) \\ &= 3\cdot 4+2\cdot(-1) \\ &= 10 \end{aligned}$$

したがって、$F(1)=8,\ F'(1)=10$ である。

練習問題 4 の解答・解説

$(x+1)^2$ を同じ因子の積 $(x+1)(x+1)$ と見る。

$$\begin{aligned} y' &= 1\cdot(x+1)+(x+1)\cdot 1 \\ &= 2x+2 \end{aligned}$$

したがって、$y'=2x+2$ である。
同じ因子の積でも、片方を微分して他方を掛けた 2 項を足すことで求められる。

練習問題 5 の解答・解説

3 因子の積は、まず 2 因子の積としてまとめて考える。

$$\begin{aligned} y' &= ((x-1)(x+2))'(x+4) \\ &\quad +(x-1)(x+2)(x+4)' \\ &= (2x+1)(x+4)+(x-1)(x+2) \end{aligned}$$

各項を展開して整理すると、次の式を得る。

$$\begin{aligned} y' &= \left(2x^2+9x+4\right)+\left(x^2+x-2\right) \\ &= 3x^2+10x+2 \end{aligned}$$

したがって、導関数は $y'=3x^2+10x+2$ となる。
3 因子の場合も、積の微分を繰り返して求められる。

練習問題 6 の解答・解説

積の微分公式を $x = 0$ に適用する。

$$F'(0) = f'(0)g(0) + f(0)g'(0)$$

与えられた値を積の微分公式へ代入すると、次の等式を得る。

$$\begin{aligned} 24 &= 3f'(0) + 5 \cdot 6 \\ &= 3f'(0) + 30 \end{aligned}$$

この等式を解くと、$3f'(0) = -6$ となり、$f'(0) = -2$ である。
検算すると、$(-2) \cdot 3 + 5 \cdot 6 = 24$ となり、条件を満たす。
また、$g(0) = 3 \neq 0$ であるため、この値で割ることで $f'(0)$ が一意に決まる。

練習問題 7 の解答・解説

(1)
$f(x) = |\, x \,|$ について、$h \neq 0$ のとき差分商は次のように表される。

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|\, h \,|}{h}$$

$h > 0$ のとき値は 1、$h < 0$ のとき値は -1 であるため、左右の極限が一致しない。したがって、f は 0 で微分可能ではない。
g も同じ関数であるため、0 で微分可能ではない。
(2)
積は $F(x) = |\, x \,|\, |\, x \,| = x^2$ と表される。$h \neq 0$ として、差分商を次のように計算する。

$$\begin{aligned} \frac{F(0+h) - F(0)}{h} &= \frac{h^2}{h} \\ &= h \end{aligned}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(0+h) - F(0)}{h} = 0$$

差分商は $h \to 0$ で 0 に近づくので、F は 0 で微分可能であり、$F'(0) = 0$ である。
(3)
この例では、各因子が微分可能でないにもかかわらず、積は微分可能である。
各因子の微分可能性は積が微分可能であるための十分条件であり、必要条件ではない。したがって、積の微分公式を使うには各因子の微分係数が存在することを確かめる必要があり、積そのものが微分可能であることだけから公式を適用してはいけない。

©ミライコーチング

練習問題 8 の解答・解説

積の差を一方ずつ変化させるため、恒等変形を行う。

$$\begin{aligned}\frac{F(a+h)-F(a)}{h} &= \frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h}\\ &= \frac{\{f(a+h)-f(a)\}g(a+h)}{h}\\ &\quad + \frac{f(a)\{g(a+h)-g(a)\}}{h}\end{aligned}$$

先ほどの恒等分解を差分商へ用いると、次の式を得る。

$$\begin{aligned}\frac{F(a+h)-F(a)}{h} &= \frac{f(a+h)-f(a)}{h}g(a+h)\\ &\quad + f(a)\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\end{aligned}$$

ここで、f, g は a で微分可能なので、各差分商の極限が存在する。また、微分可能なら連続であるため、$g(a+h) \to g(a)$ となる。
したがって、$h \to 0$ の極限を取ることで、積の微分公式の 2 つの項へ対応する。