

第 87 講 二次方程式・判別式・解と係数

学習目標

- ・ 二次方程式に解の公式を使い、実数解・複素数解を求められる。
- ・ 判別式 $D = b^2 - 4ac$ の符号から、実数解の個数を判断できる。
- ・ $D < 0$ のとき、複素数解を $i\sqrt{-D}$ を使って表せる。
- ・ 二次方程式の解と係数の関係を使い、解の和や積を求められる。

二次方程式で最初に確認する条件

二次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

では、 a, b, c を実数とし、必ず $a \neq 0$ とする。 $a = 0$ では x^2 の項がなくなり、二次方程式ではないからである。

二次方程式では、「実際に解を求める」「実数解が何個あるかを判断する」「解そのものを求めずに和や積を調べる」という三つの見方が重要である。この三つは、解の公式、判別式、解と係数の関係につながっている。

解の公式はどこから出てくるか

二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ に対して、左辺を平方の形に近づける。
もとの方程式を $4a$ 倍すると、

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

である。左辺の最初の二つの項を $(2ax + b)^2$ の形にすると、

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

となる。

ここで、 $b^2 - 4ac$ が解の形を決める量になっていることが分かる。

判別式

二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ において、 a, b, c を実数、 $a \neq 0$ とする。

$$D = b^2 - 4ac$$

をこの二次方程式の判別式という。

解の公式

二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ で $a \neq 0$ とする。

$D = b^2 - 4ac \geq 0$ のとき、解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

である。

$D = b^2 - 4ac < 0$ のときは $-D > 0$ であるため、 $\sqrt{-D}$ は実数として定義できる。このとき複素数の範囲で、

$$x = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a}$$

である。

負の数をそのまま実数の平方根にしない

$D < 0$ のとき、実数の範囲では $\sqrt{D}$ を考えない。

たとえば $D = -12$ なら、 $\sqrt{-12}$ と書くのではなく、複素数の範囲で平方根を

$$\pm i\sqrt{12}$$

と表す。

したがって、解の公式でも $D < 0$ の場合は $i\sqrt{-D}$ を使う。このとき $-D > 0$ なので、 $\sqrt{-D}$ は正の実数の平方根である。

判別式で実数解の個数が分かる理由

解の公式を見ると、実数解の個数を決めているのは平方根の中の D である。

- $D > 0$ なら、 $\sqrt{D} > 0$ であり、 $+\sqrt{D}$ と $-\sqrt{D}$ から異なる二つの実数解が得られる。
- $D = 0$ なら、平方根の部分が 0 になり、二つの式が同じ解になる。
- $D < 0$ なら、実数の範囲では平方根を作れないため、実数解はない。ただし複素数の範囲では二つの解をもつ。

したがって、実数解の個数は次のように判定できる。

判別式	実数解
$D > 0$	異なる 2 個の実数解
$D = 0$	1 個の実数解（重解）
$D < 0$	実数解なし

$D < 0$ の場合も、複素数の範囲では

$$x = \frac{-b + i\sqrt{-D}}{2a}, \quad x = \frac{-b - i\sqrt{-D}}{2a}$$

という二つの解が存在する。

解と係数の関係

二次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

の二つの解を α, β とする。ここでは $a \neq 0$ とし、 α, β は複素数の範囲で重複も含めて二つの解として考える。

二つの解が α, β なら、左辺は

$$a(x - \alpha)(x - \beta)$$

と表せる。展開すると、

$$\begin{aligned} a(x - \alpha)(x - \beta) &= a\{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\} \\ &= ax^2 - a(\alpha + \beta)x + a\alpha\beta \end{aligned}$$

である。

これを $ax^2 + bx + c$ と比べると、

$$-a(\alpha + \beta) = b, \quad a\alpha\beta = c$$

であるため、

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

を得る。

解と係数の関係

$a \neq 0$ とし、二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の二つの解を α, β とする。解は複素数の範囲で考え、重解の場合は $\alpha = \beta$ とする。

このとき、

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

が成り立つ。

解を一つずつ求めなくても、解の和と積は係数から直接分かることがポイントである。

公式を使う前の確認

解の公式、判別式、解と係数の関係を使うときは、二次方程式の形が $ax^2 + bx + c = 0$ になっていることを確認する。

また、 $a \neq 0$ が必要である。特に解と係数の関係では、 $-\frac{b}{a}$ や $\frac{c}{a}$ を使うため、 $a = 0$ では式そのものが成立しない。

例題

例題 1：解の公式で実数解を求める

二次方程式

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

を解け。

例題 1 の解答・解説

$a = 2, b = -5, c = 2$ である。

判別式は

$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac \\ &= (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 \\ &= 25 - 16 \\ &= 9 \end{aligned}$$

である。

$D > 0$ なので、異なる二つの実数解をもつ。解の公式より、

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{5 \pm 3}{4} \end{aligned}$$

である。

したがって、解は $x = 2, \frac{1}{2}$ である。

例題 2 : $D < 0$ の二次方程式

二次方程式

$$x^2 + 4x + 7 = 0$$

を複素数の範囲で解け。

例題 2 の解答・解説

$a = 1, b = 4, c = 7$ である。

判別式は

$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac \\ &= 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 \\ &= 16 - 28 \\ &= -12 \end{aligned}$$

である。

$D < 0$ なので実数解はないが、複素数の範囲では二つの解をもつ。

$-D = 12$ であるから、解の公式より、

$$\begin{aligned} x &= \frac{-4 \pm i\sqrt{12}}{2} \\ &= \frac{-4 \pm 2i\sqrt{3}}{2} \\ &= -2 \pm i\sqrt{3} \end{aligned}$$

である。

したがって、解は $x = -2 + i\sqrt{3}, -2 - i\sqrt{3}$ である。

例題 3：解と係数の関係を使う

二次方程式

$$2x^2 + 3x - 4 = 0$$

の二つの解を α, β とする。 $\alpha^2 + \beta^2$ の値を求めよ。**例題 3 の解答・解説**

解そのものを求める必要はない。求めたい式を、解の和と積で表す。
解と係数の関係より、

$$\alpha + \beta = -\frac{3}{2}, \quad \alpha\beta = -2$$

である。

また、

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

であるから、

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 2(-2) \\ &= \frac{9}{4} + 4 \\ &= \frac{25}{4} \end{aligned}$$

となる。

したがって、 $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{25}{4}$ である。**演習問題****演習 1**

二次方程式

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

を解け。

演習 2

二次方程式

$$3x^2 + 2x + 5 = 0$$

を複素数の範囲で解け。

演習 3

二次方程式

$$4x^2 + 4x + 1 = 0$$

の実数解の個数を判別式を使って求め、さらに解を求めよ。

演習 4

k を実数とする。二次方程式

$$x^2 - 4x + k = 0$$

が異なる二つの実数解をもつような k の範囲を求めよ。

演習 5

二次方程式

$$5x^2 - x - 3 = 0$$

の二つの解を α, β とする。 $\alpha + \beta$ と $\alpha\beta$ を求めよ。

演習 6

二次方程式

$$2x^2 + 5x + 1 = 0$$

の二つの解を α, β とする。 $\alpha^2 + \beta^2$ を求めよ。

演習 7

二つの数 α, β が

$$\alpha + \beta = 4, \quad \alpha\beta = -3$$

を満たしている。 α, β を二つの解にもつ、 x^2 の係数が 1 である二次方程式を作れ。

演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

$a = 1, b = -6, c = 5$ である。

判別式は

$$\begin{aligned} D &= (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 \\ &= 36 - 20 \\ &= 16 \end{aligned}$$

である。

解の公式より、

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{16}}{2} \\ &= \frac{6 \pm 4}{2} \end{aligned}$$

となる。

したがって、解は $x = 1, 5$ である。

演習 2 の解答・解説

$a = 3, b = 2, c = 5$ である。

判別式は

$$\begin{aligned} D &= 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 \\ &= 4 - 60 \\ &= -56 \end{aligned}$$

である。

$D < 0$ なので、実数解はない。複素数の範囲では $-D = 56$ を用いて、

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2 \pm i\sqrt{56}}{6} \\ &= \frac{-2 \pm 2i\sqrt{14}}{6} \\ &= \frac{-1 \pm i\sqrt{14}}{3} \end{aligned}$$

となる。

したがって、解は $x = \frac{-1+i\sqrt{14}}{3}, \frac{-1-i\sqrt{14}}{3}$ である。

演習 3 の解答・解説

$a = 4, b = 4, c = 1$ である。

判別式は

$$\begin{aligned} D &= 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 \\ &= 16 - 16 \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。

$D = 0$ なので、実数解は 1 個であり、重解である。

解の公式より、

$$x = \frac{-4}{2 \cdot 4} = -\frac{1}{2}$$

となる。

したがって、実数解は 1 個であり、解は $x = -\frac{1}{2}$ である。

演習 4 の解答・解説

異なる二つの実数解をもつ条件は $D > 0$ である。

$a = 1, b = -4, c = k$ なので、

$$\begin{aligned} D &= (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot k \\ &= 16 - 4k \end{aligned}$$

である。

したがって、

$$\begin{aligned} 16 - 4k &> 0 \\ -4k &> -16 \\ k &< 4 \end{aligned}$$

となる。

よって、求める範囲は $k < 4$ である。

演習 5 の解答・解説

二次方程式 $5x^2 - x - 3 = 0$ では、 $a = 5, b = -1, c = -3$ である。

解と係数の関係より、

$$\alpha + \beta = -\frac{-1}{5} = \frac{1}{5}$$

であり、

$$\alpha\beta = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$$

である。

したがって、 $\alpha + \beta = \frac{1}{5}, \alpha\beta = -\frac{3}{5}$ である。

演習 6 の解答・解説

解と係数の関係より、

$$\alpha + \beta = -\frac{5}{2}, \quad \alpha\beta = \frac{1}{2}$$

である。

$\alpha^2 + \beta^2$ は

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

と変形できる。

したがって、

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 &= \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{25}{4} - 1 \\ &= \frac{21}{4}\end{aligned}$$

である。

よって、 $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{21}{4}$ である。

演習 7 の解答・解説

α, β を解にもつ、 x^2 の係数が 1 である二次方程式は、

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0$$

と表せる。

展開すると、

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

である。

$\alpha + \beta = 4$, $\alpha\beta = -3$ を代入すると、

$$x^2 - 4x - 3 = 0$$

となる。

したがって、求める二次方程式は $x^2 - 4x - 3 = 0$ である。