第 042 講 復元力から単振動を見分ける

この講でできるようになること

- つり合い位置と正方向を決め、物体に働くすべての力から合力を求められる。
- 合力がつり合い位置からの変位に比例し、変位と逆向きになるかを調べ、単振動の条件を判定できる。
- 鉛直ばねで、自然長からの伸びとつり合い位置からの変位を区別できる。
- 力の式やグラフから、比例係数の符号と一定性を判断し、単振動の条件を満たさない例を説明できる。

1. 物体を戻そうとする力

ばねを左右に動かすとどうなるか

滑らかな水平面の上に物体を置き、その左側に理想的なばねを取り付ける。ばねの左端は壁に固定されており、物体は水平方向にだけ動けるものとする。

ばねが自然長、つまり伸びも縮みもない長さのとき、物体には水平方向のばねの力が働かない。この位置をつり合い位置 O とし、右向きを正にとる。

物体を右へ動かしてばねを伸ばすと、ばねは物体を左へ引く。反対に、左へ動かしてばねを縮めると、ばねは物体を右へ押す。

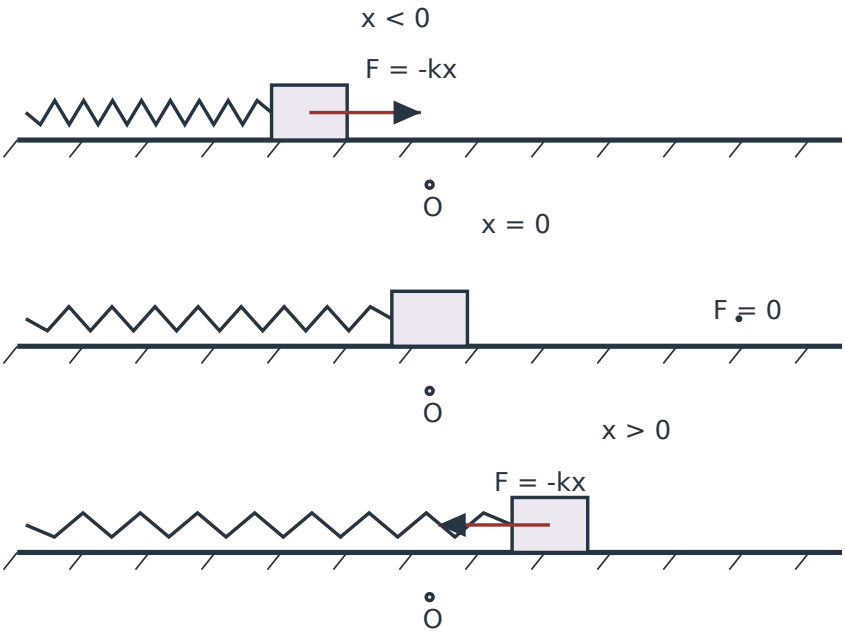

図 1　各段は同じ装置の異なる時刻。横方向の合力だけを示す。右正。

図の 3 段は、物体が上下に動く様子ではなく、同じ水平ばねの異なる状態を並べたものである。

物体の位置	ばねの状態	水平方向の合力
$x<0$（左側）	圧縮	右向き（正）
$x=0$（つり合い位置）	自然長	0
$x>0$（右側）	伸び	左向き（負）

この装置では、物体に下向きの重力と上向きの垂直抗力も働いている。しかし両者はつり合っているため、水平運動を考えるときの合力はばねの力だけになる。

物体がつり合い位置からずれたとき、その位置へ戻そうとする向きに働く力を**復元力**という。

ただし、物体をつり合い位置へ戻そうとするだけでは、必ずしも単振動になるとは限らない。

戻す向きに働くことに加えて、その力の大きさが変位にどのように関係するかが重要になる。

2. 単振動を決める合力の条件

変位に比例し、向きは逆になる

物体の質量を m、つり合い位置からの符号付き変位を x、運動方向の合力を F とする。

単振動を判定するために、次の形へ合力を整理する。

単振動を生む合力の条件

質量 m が一定で正の物体が、1 次元の理想的な条件で運動するとき、つり合い位置からの変位 x に対する合力が

$$F=-Kx$$

と表され、K が正の一定値であれば、単振動の条件を満たす。

ここで、

- F：運動方向の合力（N）
- x：つり合い位置からの変位（m）
- K：正の一定の比例係数（N/m）

である。

式のマイナス記号は、力が常に左向きという意味ではない。変位と力の向きが反対になることを表している。

- $x>0$ なら $F<0$：正方向へずれた物体を負方向へ戻そうとする。
- $x<0$ なら $F>0$：負方向へずれた物体を正方向へ戻そうとする。
- $x=0$ なら $F=0$：つり合い位置では合力がゼロになる。

さらに、変位の大きさを 2 倍にすると、合力の大きさも 2 倍になる。これは K が一定であるためである。

運動方程式とのつながり

第 019 講で学んだ運動方程式は、質量 m、加速度 a に対して

$$ma=F$$

である。

ここへ単振動の合力条件 $F = -Kx$ を代入すると、

$$ma = -Kx$$

となる。$m > 0$ なので、両辺を m で割って

$$a = -\frac{K}{m}x$$

を得る。

つまり、**加速度もつり合い位置からの変位に比例し、変位と逆向きになる。**

これは第 041 講で扱った単振動の加速度

$$a = -\omega^2 x$$

と同じ形であり、

$$\omega^2 = \frac{K}{m}$$

と対応する。ω は単振動の角振動数を表す記号である。

ここでは、その数値から周期を導く必要はない。合力が単振動を生む形になっていることを判断できればよい。

合力から判定する順序

1. 物体が動く軸と正方向を決める。
2. 合力がゼロになるつり合い位置を求める。
3. 物体に働くすべての力を符号付きで加える。
4. つり合い位置からの変位 x を使って合力を書き直す。
5. $F = -Kx$ と表せるか、さらに $K > 0$ が一定かを確認する。

一つの力だけでなく、物体に働く合力で判断する。

今回扱うのは、摩擦・減衰・外部からの周期的な駆動力がない理想的な 1 次元運動である。ばねを使う場合は、ばねの力が伸びや縮みに比例する範囲を考える。

3. グラフから復元力を読み取る

負の傾きならどうなるか

つり合い位置を原点として、横軸に変位 x、縦軸に合力 F をとったグラフを考える。

例えば、x を m、F を N で表すとき、合力が

$$F = -(10\,\mathrm{N/m})x$$

となる場合は、次のような右下がりの直線になる。

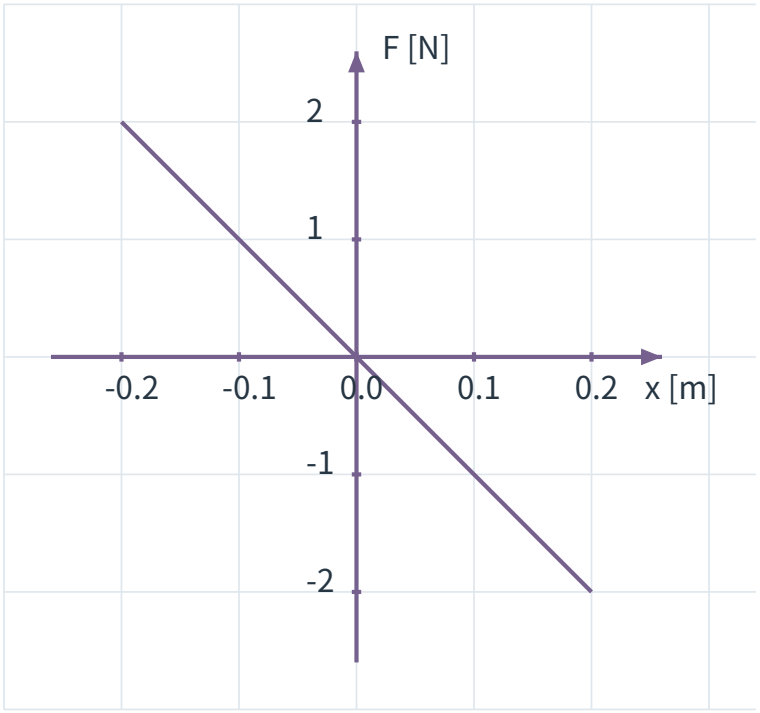

図 2　横 1 目盛 0.10m、縦 1 目盛 1N。数値目盛で傾きを読む。

例えば、グラフから

- $x = +0.10\,\mathrm{m}$ のとき $F = -1.0\,\mathrm{N}$
- $x = -0.10\,\mathrm{m}$ のとき $F = +1.0\,\mathrm{N}$

と読み取れる。

この 2 点を使って直線の傾きを求めると、

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{-1.0\,\mathrm{N} - (+1.0\,\mathrm{N})}{+0.10\,\mathrm{m} - (-0.10\,\mathrm{m})}$$
$$= -10\,\mathrm{N/m}$$

となる。

原点を通る直線で、傾きが負の一定値であるから、$F = -Kx$ の形になっている。したがって、この範囲では単振動の合力条件を満たす。

正の傾きではどうなるか

次に、同じ軸と目盛で

$$F = (10\,\mathrm{N/m})x$$

となる場合を考える。

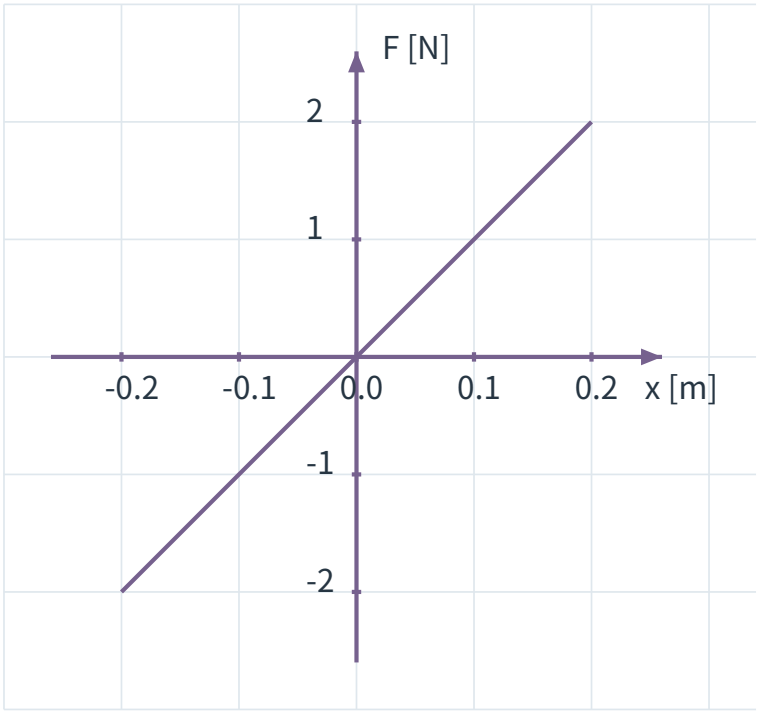

図 3　横 1 目盛 0.10m、縦 1 目盛 1N。数値目盛で傾きを読む。

この場合、$x > 0$ なら $F > 0$ となる。物体が右にずれると、さらに右へ動かす向きの力が働くのである。

$x < 0$ でも力は負方向となり、つり合い位置から遠ざける向きになる。

合力は変位に比例しているが、**変位と同じ向きであるため、単振動の条件を満たさない。**

グラフの特徴	合力の関係	単振動の条件
原点を通る負の一定傾きの直線	$F = -Kx$、$K > 0$	満たす
原点を通る正の一定傾きの直線	$F = +Kx$、$K > 0$	満たさない
原点を通るが傾きが一定でない関係	一定の K で表せない	この条件を満たさない

この判定では、横軸の原点がつり合い位置であることが前提となる。

つり合い位置で速度もゼロになるのか

つり合い位置では $x = 0$ なので、$F = -Kx$ から

$$F = 0, \qquad a = 0$$

となる。

しかし、これは速度 $v = 0$ を意味しない。物体がつり合い位置を通過する瞬間には、合力と加速度がゼロでも速度がゼロでないことがある。

一方、物体が初めからつり合い位置にあり、初速度もゼロなら、理想的な条件ではそのまま静止する。これは振幅がゼロの特別な場合である。

©ミライコーチング

合力がゼロという情報は、その瞬間の**加速度**を決めるものであり、**速度**を直接決めるものではない。

4. 水平ばねで合力と加速度を調べる

例題 1

滑らかな水平面上に質量 $0.50\,\mathrm{kg}$ の物体があり、左端を壁に固定した理想ばねにつながっている。右向きを正とし、ばねが自然長のときの物体の位置を $x=0$ とする。水平方向の合力 F は、x を m で表すと

$$F=-(8.0\,\mathrm{N/m})x$$

で与えられる。物体には鉛直方向に重力と垂直抗力が働き、両者はつり合っている。摩擦はないものとする。

例題 1(1) $x=+0.10\,\mathrm{m}$ にあるときの合力と加速度を求めよ。向きも答えよ。

例題 1(2) $x=-0.10\,\mathrm{m}$ にあるときの合力と加速度を求めよ。向きも答えよ。

例題 1(3) $x=0$ にあるときの合力と加速度を求めよ。また、この情報だけで速度がゼロといえるか答えよ。

例題 1(4) この運動が単振動の条件を満たすことを、加速度と変位の関係から説明せよ。

例題 1 の解答・解説

例題 1(1) $x = +0.10\,\mathrm{m}$ を合力の式へ代入すると、

$$\begin{aligned} F &= -(8.0\,\mathrm{N/m})(+0.10\,\mathrm{m}) \\ &= -0.80\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。負の符号は左向きを表す。

運動方程式 $ma = F$ より、

$$\begin{aligned} a &= \frac{-0.80\,\mathrm{N}}{0.50\,\mathrm{kg}} \\ &= -1.6\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

したがって、**合力は左向き** $0.80\,\mathrm{N}$、**加速度は左向き** $1.6\,\mathrm{m/s^2}$ である。

例題 1(2) $x = -0.10\,\mathrm{m}$ を代入すると、

$$\begin{aligned} F &= -(8.0\,\mathrm{N/m})(-0.10\,\mathrm{m}) \\ &= +0.80\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} a &= \frac{+0.80\,\mathrm{N}}{0.50\,\mathrm{kg}} \\ &= +1.6\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

したがって、**合力は右向き** $0.80\,\mathrm{N}$、**加速度は右向き** $1.6\,\mathrm{m/s^2}$ である。

左右どちらへずれても、加速度はつり合い位置へ向く。

例題 1(3) $x = 0$ では、

$$F = 0\,\mathrm{N}, \qquad a = 0\,\mathrm{m/s^2}$$

となる。

ただし、速度がゼロとは限らない。つり合い位置を通過している瞬間なら、速度をもって動いていることがある。

例題 1(4) 運動方程式から、

$$\begin{aligned} a &= \frac{F}{m} \\ &= -\frac{8.0\,\mathrm{N/m}}{0.50\,\mathrm{kg}}x \\ &= -(16\,\mathrm{s^{-2}})x \end{aligned}$$

となる。

加速度は変位に比例し、その比例係数は負の一定値である。よって、単振動の条件を満たす。

5. 鉛直ばねでは、つり合い位置がずれる

自然長とつり合い位置の違い

今度は、ばねの上端を天井に固定し、下端に物体をつり下げる。

水平ばねと異なり、物体には常に下向きの重力が働いている。物体が静止してつり合うためには、ばねが伸び、その弾性力が重力とつり合わなければならない。

ここでは下向きを正とし、次の 2 つを区別する。

- δ：ばねの自然長からの伸び
- x：物体のつり合い位置からの符号付き変位

ばねの伸びは、自然長のときの**ばね下端の位置**を基準として測る。物体の中心までの距離をそのまま δ とするわけではない。

ばね下端と物体の中心は固定した距離を保って一緒に動くため、つり合い位置からの変位はどちらの点で測っても同じになる。

重力とばねの力を足す

物体の質量を m、重力加速度の大きさを g、ばね定数を k とする。

ばねが自然長より $\delta > 0$ だけ伸びているとき、物体に働く力は次の 2 つである。

力	向き	符号付きの値
重力	下向き	$+mg$
ばねの弾性力	上向き	$-k\delta$

よって、鉛直方向の合力は

$$F = mg - k\delta$$

である。

つり合い位置での伸びを δ_0 とすると、合力がゼロだから、

$$mg - k\delta_0 = 0$$

すなわち、

$$mg = k\delta_0$$

となる。

したがって、つり合い位置での伸びは

$$\delta_0 = \frac{mg}{k}$$

である。

ここで重要なのは、δ_0 が一般にはゼロではないことである。鉛直ばねでは、自然長の位置とつり合い位置が一致しない。

つり合い位置からの変位に直す

下向きを正としたまま、つり合い位置からの変位を

$$x = \delta - \delta_0$$

と定義する。

これを変形すると、

$$\delta = \delta_0 + x$$

である。

合力に代入すると、

$$\begin{aligned} F &= mg - k\delta \\ &= mg - k(\delta_0 + x) \\ &= (mg - k\delta_0) - kx \\ &= -kx \end{aligned}$$

となる。

最後の変形では、つり合い条件 $mg = k\delta_0$ を使った。

重力が消えたのではない。重力と、つり合い位置でのばねの力が相殺されたのである。

結果として、つり合い位置からの変位を使えば、水平ばねと同じ $F = -kx$ の形になる。

鉛直ばねの座標の選び方

自然長を基準にした伸び δ と、つり合い位置を基準にした変位 x は異なる。

$$mg = k\delta_0$$

$$x = \delta - \delta_0$$

$$F = mg - k\delta = -kx$$

単振動を判定するときは、**自然長からではなく、つり合い位置からの変位**で合力を整理する。

6. 鉛直ばねの各位置で合力を求める

例題 2

天井に上端を固定した理想ばねの下端に、質量 $0.20\,\mathrm{kg}$ の物体をつり下げる。

ばね定数は $10\,\mathrm{N/m}$、重力加速度の大きさは $10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。下向きを正にとり、自然長からの伸びを δ、つり合い位置からの変位を x とする。

ばねの質量、空気抵抗、減衰は無視し、以下の状態ではばねは自然長より伸びているものとする。

例題 2(1) つり合い位置での伸び δ_0 を求めよ。

例題 2(2) ばねの伸びが $\delta = 0.30\,\mathrm{m}$ のとき、x、重力とばねの力、合力、加速度をそれぞれ求めよ。力の向きも答えよ。

例題 2(3) ばねの伸びが $\delta = 0.10\,\mathrm{m}$ のとき、x、重力とばねの力、合力、加速度をそれぞれ求めよ。力の向きも答えよ。

例題 2(4) この物体の合力が $F = -kx$ となることを数値と式で示し、重力がどのように扱われたか説明せよ。

例題 2 の解答・解説

例題 2(1) 物体に働く重力の大きさは、

$$\begin{aligned} mg &= (0.20\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2}) \\ &= 2.0\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

である。

つり合い位置では、上向きのばねの力が下向きの重力と等しい。

$$k\delta_0 = mg$$

より、

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \frac{2.0\,\mathrm{N}}{10\,\mathrm{N/m}} \\ &= 0.20\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

したがって、**つり合い位置は自然長から** $0.20\,\mathrm{m}$ **伸びた位置**である。

例題 2(2) $\delta = 0.30\,\mathrm{m}$ だから、つり合い位置からの変位は

$$\begin{aligned} x &= \delta - \delta_0 \\ &= 0.30\,\mathrm{m} - 0.20\,\mathrm{m} \\ &= +0.10\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

である。物体はつり合い位置より下にある。

重力は下向きに $+2.0\,\mathrm{N}$、ばねの力は上向きであり、

$$\begin{aligned} F_\mathrm{s} &= -(10\,\mathrm{N/m})(0.30\,\mathrm{m}) \\ &= -3.0\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

ここで F_s は、物体がばねから受ける符号付きの力を表す。

合力は 2 つの力の和だから、

$$\begin{aligned} F &= +2.0\,\mathrm{N} - 3.0\,\mathrm{N} \\ &= -1.0\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

である。

よって加速度は、

$$\begin{aligned} a &= \frac{-1.0\,\mathrm{N}}{0.20\,\mathrm{kg}} \\ &= -5.0\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

となる。

したがって、$x = +0.10\,\mathrm{m}$、**合力は上向き** $1.0\,\mathrm{N}$、**加速度は上向き** $5.0\,\mathrm{m/s^2}$ である。

例題 2(3) $\delta = 0.10\,\mathrm{m}$ のとき、

$$\begin{aligned} x &= 0.10\,\mathrm{m} - 0.20\,\mathrm{m} \\ &= -0.10\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

となる。

物体はつり合い位置より上にある。ただし、ばねは自然長から $0.10\,\mathrm{m}$ 伸びているため、ばねの力は上向きのままである。

重力は $+2.0\,\mathrm{N}$、ばねの力は

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{s}} &= -(10\,\mathrm{N/m})(0.10\,\mathrm{m}) \\ &= -1.0\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

である。

合力を求めると、

$$\begin{aligned} F &= +2.0\,\mathrm{N} - 1.0\,\mathrm{N} \\ &= +1.0\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

したがって、

$$\begin{aligned} a &= \frac{+1.0\,\mathrm{N}}{0.20\,\mathrm{kg}} \\ &= +5.0\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

である。

合力は下向き $1.0\,\mathrm{N}$、加速度は下向き $5.0\,\mathrm{m/s^2}$ となる。

ここでは、ばねの力は上向きであるにもかかわらず、合力は下向きになっている。重力の方が大きいためである。

3 つの状態を図で比較する

以下の図では、ばねの上端を固定し、自然長からの伸びが異なる 3 状態を並べている。

$L0$ は自然長のときのばね下端の位置、O はつり合い位置でのばね下端の位置を示す。矢印は物体に働く個別の力であり、合力は重力とばねの力を足して求める。

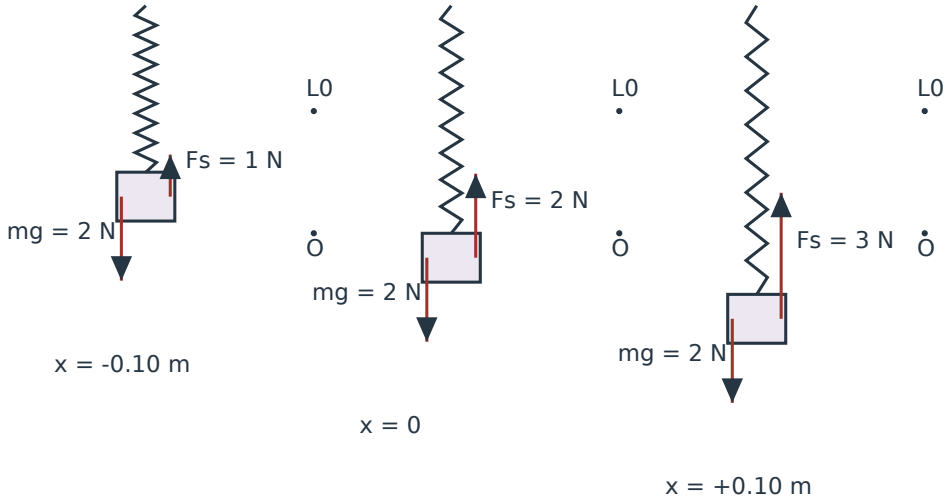

図 4　下向き正、m=0.20 kg、g=10 m/s²、k=10 N/m。印 L0/O はばね下端の自然長/つり合い位置。

図の 3 状態を、個別の力から合力まで整理すると次のようになる。F_{s} は符号付きで記す。

伸び δ（m）	変位 x（m）	重力（N）	ばねの力 F_{s}（N）	合力 F（N）
0.10	-0.10	$+2.0$	-1.0	$+1.0$
0.20	0	$+2.0$	-2.0	0
0.30	$+0.10$	$+2.0$	-3.0	-1.0

例題 2(4) この場合、つり合い位置での伸びは $\delta_0 = 0.20\,\mathrm{m}$ なので、

$$\delta = 0.20\,\mathrm{m} + x$$

である。

合力は

$$\begin{aligned} F &= mg - k\delta \\ &= 2.0\,\mathrm{N} - (10\,\mathrm{N/m})(0.20\,\mathrm{m} + x) \\ &= 2.0\,\mathrm{N} - 2.0\,\mathrm{N} - (10\,\mathrm{N/m})x \\ &= -(10\,\mathrm{N/m})x \end{aligned}$$

となる。

比例係数は正の一定値 $10\,\mathrm{N/m}$ であるため、単振動の合力条件を満たす。

重力 $2.0\,\mathrm{N}$ は常に下向きに働いている。しかし、つり合い位置でのばねの上向きの力 $2.0\,\mathrm{N}$ と相殺され、つり合い位置からの変位に応じた合力だけが残る。

鉛直ばねでも、判断するのはばねの力だけではなく、重力を含めた合力である。

7. 原点を移すと単振動が見える

これまでの水平ばねでは、自然長の位置とつり合い位置が一致していた。一方、鉛直ばねでは両者がずれていた。

単振動を見分けるためには、最初に与えられた座標の原点がどこにあるかにも注意が必要である。

合力の式に変位と無関係な一定項が含まれていても、つり合い位置を新しい原点にすると $F = -Kx$ の形へ整理できる場合がある。

例題 3

ある物体が一直線上を摩擦なしで動く。右向きを正とし、固定された基準点から測った位置を y とする。

物体の質量は $1.0\,\mathrm{kg}$ で、合力は

$$F = 6.0\,\mathrm{N} - (2.0\,\mathrm{N/m})y$$

で与えられる。y の単位は m である。

例題 3(1) 合力がゼロになる位置 y_0 を求めよ。

例題 3(2) つり合い位置からの変位を $x = y - y_0$ とし、合力を x で表せ。

例題 3(3) この運動が単振動の条件を満たすか判断せよ。また、$y = 4.0\,\mathrm{m}$ での合力と加速度を求めよ。

例題 3 の解答・解説

例題 3(1) つり合い位置では $F = 0$ だから、

$$0 = 6.0\,\mathrm{N} - (2.0\,\mathrm{N/m})y_0$$

より、

$$y_0 = \frac{6.0\,\mathrm{N}}{2.0\,\mathrm{N/m}}$$

$$= 3.0\,\mathrm{m}$$

となる。

したがって、つり合い位置は $y = 3.0\,\mathrm{m}$ である。

例題 3(2) 新しい変位を

$$x = y - 3.0\,\mathrm{m}$$

と定めると、

$$y = 3.0\,\mathrm{m} + x$$

である。

合力へ代入して、

$$F = 6.0\,\mathrm{N} - (2.0\,\mathrm{N/m})(3.0\,\mathrm{m} + x)$$

$$= 6.0\,\mathrm{N} - 6.0\,\mathrm{N} - (2.0\,\mathrm{N/m})x$$

$$= -(2.0\,\mathrm{N/m})x$$

を得る。

例題 3(3) $F = -Kx$ で $K = 2.0\,\mathrm{N/m} > 0$ が一定だから、単振動の条件を満たす。

加速度も、

$$\begin{aligned} a &= \frac{F}{m} \\ &= -\frac{2.0\,\mathrm{N/m}}{1.0\,\mathrm{kg}}x \\ &= -(2.0\,\mathrm{s^{-2}})x \end{aligned}$$

と表される。

$y = 4.0\,\mathrm{m}$ のとき、

$$\begin{aligned} x &= 4.0\,\mathrm{m} - 3.0\,\mathrm{m} \\ &= +1.0\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

である。

したがって、

$$\begin{aligned} F &= -(2.0\,\mathrm{N/m})(+1.0\,\mathrm{m}) \\ &= -2.0\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned} a &= \frac{-2.0\,\mathrm{N}}{1.0\,\mathrm{kg}} \\ &= -2.0\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

となる。

合力は左向き $2.0\,\mathrm{N}$、加速度は左向き $2.0\,\mathrm{m/s^2}$ である。

式に定数項があるとき

$F = 6.0\,\mathrm{N} - (2.0\,\mathrm{N/m})y$ のような式を見て、すぐに単振動ではないと判断してはいけない。

まず $F = 0$ となる位置を見つける。その位置からの変位へ座標を移したあとで、$F = -Kx$ と表せるかを調べる。

8. 戻す向きでも比例しなければ十分ではない

変位と逆向きの合力が働くことは、単振動の条件の一部である。しかし、その力の大きさが変位に比例するとは限らない。

例えば、つり合い位置から右向きを正にとり、ある力の測定結果が次のように与えられたとする。

変位 x（m）	$+0.10$	$+0.20$
合力 F（N）	-1.0	-4.0

どちらの位置でも $x > 0$ で $F < 0$ となるため、力はつり合い位置へ戻す向きである。

ところが、$x \neq 0$ での比 $\frac{F}{x}$ を調べると、

$$\frac{-1.0\,\mathrm{N}}{+0.10\,\mathrm{m}} = -10\,\mathrm{N/m}$$

であり、もう一方では

$$\frac{-4.0\,\mathrm{N}}{+0.20\,\mathrm{m}} = -20\,\mathrm{N/m}$$

となる。

変位が 2 倍になる間に合力の大きさは 4 倍になっており、同じ一定の K では $F = -Kx$ と表せない。

したがって、この 2 点に対する関係は、単振動に必要な比例関係を満たしていない。

戻す向きだけで単振動と決めない

- 力がつり合い位置へ向くこと
- 力の大きさが変位の大きさに比例すること
- その比例係数が正の一定値であること

これらを区別して確認する必要がある。

比例関係が成り立たない力による運動を、ここで単振動として扱うことはできない。別の種類の振動が生じるか、その運動がどのようになるかは、この判定だけでは決めない。

演習問題

演習 1

滑らかな水平面上に質量 0.40 kg の物体があり、左端を壁に固定した理想ばねにつながっている。ばね定数は 6.0 N/m である。自然長のときの位置を原点とし、右向きを正、変位を x とする。重力と垂直抗力はつり合い、摩擦はない。

演習 1(1) $x = +0.20\,\mathrm{m}$ にあるとき、水平合力と加速度を求めよ。向きも答えよ。

演習 1(2) $x = -0.10\,\mathrm{m}$ にあるとき、水平合力と加速度を求めよ。向きも答えよ。

演習 1(3) この運動が単振動の条件を満たすことを、合力と加速度の式から説明せよ。

解説は末尾の「演習 1 の解答・解説」を参照。

©ミライコーチング

演習 2

天井に上端を固定した理想ばねの下端に、質量 0.30 kg の物体をつり下げる。

ばね定数は 15 N/m、重力加速度の大きさは 10 m/s^2 とする。

下向きを正とし、ばねの自然長からの伸びを δ、つり合い位置からの変位を x とする。ばねの質量、空気抵抗、減衰は無視する。

演習 2(1) つり合い位置での伸び δ_0 を求めよ。

演習 2(2) $\delta = 0.14\,\mathrm{m}$ のとき、x、重力とばねの力、合力、加速度を求めよ。

演習 2(3) $\delta = 0.26\,\mathrm{m}$ のとき、x、重力とばねの力、合力、加速度を求めよ。

演習 2(4) 演習 2(2)と演習 2(3)のうち、ばねの力は上向きなのに合力が下向きになるのはどちらか。力の大きさを比較して説明せよ。

解説は末尾の「演習 2 の解答・解説」を参照。

演習 3

質量 2.0 kg の物体が、一直線上を摩擦なしで動いている。右向きを正とし、固定された基準点からの位置を y とする。

物体に働く合力は、

$$F = 8.0\,\mathrm{N} - (4.0\,\mathrm{N/m})y$$

である。

演習 3(1) つり合い位置の座標 y_0 を求めよ。

演習 3(2) つり合い位置からの変位 $x = y - y_0$ を使って、合力を表せ。

演習 3(3) 加速度を x で表し、この運動が単振動の条件を満たすか答えよ。

演習 3(4) $y = 1.5\,\mathrm{m}$ にあるとき、つり合い位置からの変位、合力、加速度をそれぞれ求めよ。

解説は末尾の「演習 3 の解答・解説」を参照。

©ミライコーチング

演習 4

つり合い位置を $x = 0$ とした 1 次元運動について、合力 F と変位 x の関係を調べる。

次の表は、2 つのモデル A・B について与えられた値である。表の「—」は値が与えられていないことを表す。

x（m）	-0.20	-0.10	0	$+0.10$	$+0.20$
A の F（N）	$+2.0$	$+1.0$	0	-1.0	-2.0
B の F（N）	—	—	—	-1.0	-4.0

どちらも教材用の理想的な数値例とする。A では、与えられた範囲の力と変位の関係が直線で表されることが分かっている。

演習 4(1) A の F–x グラフの傾きを求め、合力を $F = -Kx$ の形で表せ。また、この範囲で単振動の合力条件を満たすか答えよ。

演習 4(2) B では、示された 2 つの位置で合力がつり合い位置へ向く。それでも、この 2 つの値が一定の K による $F = -Kx$ の関係を満たさない理由を説明せよ。

演習 4(3) 別の物体に働く合力が、つり合い位置からの変位に対して

$$F = (10\,\mathrm{N/m})x$$

と表される。この物体の質量は正の一定値である。単振動の合力条件を満たすか、力の向きから説明せよ。

解説は末尾の「演習 4 の解答・解説」を参照。

演習 5

質量 $1.0\,\mathrm{kg}$ の物体に、1 次元の理想的な合力

$$F = -(5.0\,\mathrm{N/m})x$$

が働く。原点 $x = 0$ はつり合い位置であり、右向きを正とする。摩擦や減衰はない。

次の 3 つの初期状態を考える。

状態	初期位置 x_0（m）	初速度 v_0（m/s）
A	0	$+0.40$
B	$+0.20$	0
C	0	0

演習 5(1) 状態 A の初期時刻における合力と加速度を求めよ。また、その瞬間に物体が静止しているといえるか答えよ。

演習 5(2) 状態 B の初期時刻における合力と加速度を求めよ。初速度がゼロでも、その後物体が動き始める理由を説明せよ。

演習 5(3) 状態 C では物体はどうなるか。状態 A・B との違いを説明せよ。

演習 5(4) 「つり合い位置では合力がゼロだから、速度も必ずゼロである」という主張の誤りを説明せよ。

解説は末尾の「演習 5 の解答・解説」を参照。

演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

演習 1(1) 水平面では重力と垂直抗力がつり合っているため、水平方向の合力はばねの力である。

$$F = -kx$$

に $k = 6.0\,\mathrm{N/m}$、$x = +0.20\,\mathrm{m}$ を代入すると、

$$\begin{aligned} F &= -(6.0\,\mathrm{N/m})(+0.20\,\mathrm{m}) \\ &= -1.2\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

加速度は、

$$\begin{aligned} a &= \frac{-1.2\,\mathrm{N}}{0.40\,\mathrm{kg}} \\ &= -3.0\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

である。

答え：合力は左向き $1.2\,\mathrm{N}$、加速度は左向き $3.0\,\mathrm{m/s^2}$。

演習 1(2) $x = -0.10\,\mathrm{m}$ では、

$$\begin{aligned} F &= -(6.0\,\mathrm{N/m})(-0.10\,\mathrm{m}) \\ &= +0.60\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

加速度は、

$$\begin{aligned} a &= \frac{+0.60\,\mathrm{N}}{0.40\,\mathrm{kg}} \\ &= +1.5\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

である。

答え：合力は右向き $0.60\,\mathrm{N}$、加速度は右向き $1.5\,\mathrm{m/s^2}$。

演習 1(3) 合力は、

$$F = -(6.0\,\mathrm{N/m})x$$

であり、比例係数 $K = 6.0\,\mathrm{N/m}$ は正の一定値である。

運動方程式を用いると、

$$\begin{aligned} a &= \frac{F}{m} \\ &= -\frac{6.0\,\mathrm{N/m}}{0.40\,\mathrm{kg}}x \\ &= -(15\,\mathrm{s^{-2}})x \end{aligned}$$

となる。

したがって、加速度は変位に比例し、$x \neq 0$ では変位と逆向きになる。$x = 0$ では加速度も 0 になる。

答え：単振動の条件を満たす。

演習 2 の解答・解説

演習 2(1) 重力の大きさは、

$$\begin{aligned} mg &= (0.30\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2}) \\ &= 3.0\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

である。

つり合い位置では $mg = k\delta_0$ だから、

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \frac{3.0\,\mathrm{N}}{15\,\mathrm{N/m}} \\ &= 0.20\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

となる。

答え：$\delta_0 = 0.20\,\mathrm{m}$。

演習 2(2) $\delta = 0.14\,\mathrm{m}$ なので、

$$\begin{aligned} x &= \delta - \delta_0 \\ &= 0.14\,\mathrm{m} - 0.20\,\mathrm{m} \\ &= -0.06\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

となる。物体はつり合い位置より上にある。

重力は下向きに $+3.0\,\mathrm{N}$ である。

ばねの力は、

$$\begin{aligned} F_\mathrm{s} &= -(15\,\mathrm{N/m})(0.14\,\mathrm{m}) \\ &= -2.1\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

であり、上向きである。

合力は、

$$\begin{aligned} F &= +3.0\,\mathrm{N} - 2.1\,\mathrm{N} \\ &= +0.90\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

よって、加速度は

$$\begin{aligned} a &= \frac{+0.90\,\mathrm{N}}{0.30\,\mathrm{kg}} \\ &= +3.0\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

である。

答え：$x = -0.06\,\mathrm{m}$、重力は下向き $3.0\,\mathrm{N}$、ばねの力は上向き $2.1\,\mathrm{N}$、合力は下向き $0.90\,\mathrm{N}$、加速度は下向き $3.0\,\mathrm{m/s^2}$。

演習 2(3) $\delta = 0.26\,\mathrm{m}$ では、

$$\begin{aligned} x &= 0.26\,\mathrm{m} - 0.20\,\mathrm{m} \\ &= +0.06\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

である。

重力は下向きに $+3.0\,\mathrm{N}$、ばねの力は

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{s}} &= -(15\,\mathrm{N/m})(0.26\,\mathrm{m}) \\ &= -3.9\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

合力は、

$$\begin{aligned} F &= +3.0\,\mathrm{N} - 3.9\,\mathrm{N} \\ &= -0.90\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

である。

加速度は、

$$\begin{aligned} a &= \frac{-0.90\,\mathrm{N}}{0.30\,\mathrm{kg}} \\ &= -3.0\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

となる。

答え：$x = +0.06\,\mathrm{m}$、重力は下向き $3.0\,\mathrm{N}$、ばねの力は上向き $3.9\,\mathrm{N}$、合力は上向き $0.90\,\mathrm{N}$、加速度は上向き $3.0\,\mathrm{m/s^2}$。

演習 2(4) 該当するのは演習 2(2)の $\delta = 0.14\,\mathrm{m}$ の状態である。

ばねの力は上向き $2.1\,\mathrm{N}$ だが、重力は下向き $3.0\,\mathrm{N}$ である。したがって、重力の方が $0.90\,\mathrm{N}$ 大きく、合力は下向きとなる。

答え：演習 2(2)の状態。上向きのばねの力より下向きの重力が大きいためである。

ここで、つり合い位置を基準にした合力を確かめると、

$$\begin{aligned} F &= mg - k(\delta_0 + x) \\ &= (mg - k\delta_0) - kx \\ &= -(15\,\mathrm{N/m})x \end{aligned}$$

となる。

この式は、演習 2(2)で $x < 0$ なら $F > 0$、演習 2(3)で $x > 0$ なら $F < 0$ となった計算結果と一致する。

演習 3 の解答・解説

演習 3(1) つり合い位置では $F = 0$ だから、

$$0 = 8.0\,\mathrm{N} - (4.0\,\mathrm{N/m})y_0$$

となる。

したがって、

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{8.0\,\mathrm{N}}{4.0\,\mathrm{N/m}} \\ &= 2.0\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

である。

答え： $y_0 = 2.0\,\mathrm{m}$。

演習 3(2) つり合い位置からの変位を

$$x = y - 2.0\,\mathrm{m}$$

と定義する。

つまり、

$$y = 2.0\,\mathrm{m} + x$$

だから、合力の式は

$$\begin{aligned} F &= 8.0\,\mathrm{N} - (4.0\,\mathrm{N/m})(2.0\,\mathrm{m} + x) \\ &= 8.0\,\mathrm{N} - 8.0\,\mathrm{N} - (4.0\,\mathrm{N/m})x \\ &= -(4.0\,\mathrm{N/m})x \end{aligned}$$

となる。

答え： $F = -(4.0\,\mathrm{N/m})x$。

演習 3(3) 運動方程式 $ma = F$ より、

$$\begin{aligned} a &= \frac{F}{m} \\ &= -\frac{4.0\,\mathrm{N/m}}{2.0\,\mathrm{kg}}x \\ &= -(2.0\,\mathrm{s^{-2}})x \end{aligned}$$

となる。

変位に対する加速度の比例係数が負の一定値であるため、単振動の条件を満たす。

答え：$a=-(2.0\,\mathrm{s^{-2}})x$、単振動の条件を満たす。

演習 3(4) $y=1.5\,\mathrm{m}$ のとき、

$$\begin{aligned}x&=1.5\,\mathrm{m}-2.0\,\mathrm{m}\\&=-0.50\,\mathrm{m}\end{aligned}$$

である。

合力は、

$$\begin{aligned}F&=-(4.0\,\mathrm{N/m})(-0.50\,\mathrm{m})\\&=+2.0\,\mathrm{N}\end{aligned}$$

となる。

加速度は、

$$\begin{aligned}a&=\frac{+2.0\,\mathrm{N}}{2.0\,\mathrm{kg}}\\&=+1.0\,\mathrm{m/s^2}\end{aligned}$$

である。

答え：変位は $-0.50\,\mathrm{m}$、合力は右向き $2.0\,\mathrm{N}$、加速度は右向き $1.0\,\mathrm{m/s^2}$。

物体はつり合い位置の左側にあるため、合力は右向きになっている。

演習 4 の解答・解説

演習 4(1) A の表から、例えば

$$x_1=-0.10\,\mathrm{m},\ F_1=+1.0\,\mathrm{N}$$
$$x_2=+0.10\,\mathrm{m},\ F_2=-1.0\,\mathrm{N}$$

を選ぶ。

傾きは、

$$\begin{aligned}\frac{\Delta F}{\Delta x}&=\frac{F_2-F_1}{x_2-x_1}\\&=\frac{-1.0\,\mathrm{N}-(+1.0\,\mathrm{N})}{+0.10\,\mathrm{m}-(-0.10\,\mathrm{m})}\\&=-10\,\mathrm{N/m}\end{aligned}$$

である。

A の関係は原点を通る直線なので、

$$F=-(10\,\mathrm{N/m})x$$

と表せる。

比例係数 $K=10\,\mathrm{N/m}$ は正の一定値だから、与えられた範囲で単振動の合力条件を満たす。

答え：傾きは $-10\,\mathrm{N/m}$、$F=-(10\,\mathrm{N/m})x$。単振動の合力条件を満たす。

演習 4(2) B で $x=+0.10\,\mathrm{m}$ のとき、

$$\begin{aligned}\frac{F}{x}&=\frac{-1.0\,\mathrm{N}}{+0.10\,\mathrm{m}}\\&=-10\,\mathrm{N/m}\end{aligned}$$

となる。

一方、$x=+0.20\,\mathrm{m}$ のとき、

$$\begin{aligned}\frac{F}{x}&=\frac{-4.0\,\mathrm{N}}{+0.20\,\mathrm{m}}\\&=-20\,\mathrm{N/m}\end{aligned}$$

である。

この 2 つの値が一致しないため、両方の点を同じ正の一定値 K による $F=-Kx$ で表すことはできない。

答え：合力は示された位置で変位と逆向きだが、$\frac{F}{x}$ が一定でないため、単振動に必要な比例関係を満たさない。

演習 4(3) 合力が

$$F=(10\,\mathrm{N/m})x$$

である場合、$x>0$ なら $F>0$、$x<0$ なら $F<0$ となる。

どちらの場合も、物体をつり合い位置から遠ざける向きに力が働く。

答え：単振動の合力条件を満たさない。力が変位に比例していても、変位と同じ向きに働くためである。

単振動を判断するには、比例関係だけでなく比例係数の符号も調べる必要がある。

演習 5 の解答・解説

演習 5(1) 状態 A の初期位置は $x_0=0$ だから、

$$F=0\,\mathrm{N}$$

である。

加速度も、

$$a=\frac{0\,\mathrm{N}}{1.0\,\mathrm{kg}}=0\,\mathrm{m/s^2}$$

となる。

しかし、初速度は $+0.40\,\mathrm{m/s}$ と与えられているため、初期時刻に物体は右向きに動いている。

答え：合力 $0\,\mathrm{N}$、加速度 $0\,\mathrm{m/s^2}$。初速度が右向き $0.40\,\mathrm{m/s}$ なので静止していない。

演習 5(2) 状態 B では $x_0 = +0.20\,\mathrm{m}$ だから、

$$\begin{aligned} F &= -(5.0\,\mathrm{N/m})(+0.20\,\mathrm{m}) \\ &= -1.0\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

加速度は、

$$\begin{aligned} a &= \frac{-1.0\,\mathrm{N}}{1.0\,\mathrm{kg}} \\ &= -1.0\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

である。

初速度はゼロでも、左向きの加速度があるため、物体はその後左向きに動き始める。

答え：合力は左向き $1.0\,\mathrm{N}$、加速度は左向き $1.0\,\mathrm{m/s^2}$。初速度がゼロでも加速度がゼロではないため、動き始める。

演習 5(3) 状態 C では初期位置と初速度がともにゼロである。

つり合い位置なので合力はゼロであり、加速度もゼロである。さらに、初速度もゼロなので、理想的な条件では物体はその位置で静止し続ける。

これは振幅がゼロの特別な場合である。

一方、状態 A ではつり合い位置にいても初速度をもっている。状態 B では初速度がゼロでもつり合い位置からずれているため、合力が働く。

答え：状態 C では静止し続ける。状態 A は初速度がゼロでなく、状態 B は初期位置で合力がゼロでない点が異なる。

演習 5(4) 運動方程式は、

$$F = ma$$

である。

合力がゼロなら加速度はゼロとなるが、速度がゼロになるとは限らない。

状態 A のように、つり合い位置を通過する瞬間には $F = 0$、$a = 0$ であっても速度がゼロでない場合がある。

答え：合力がゼロであることから分かるのは加速度がゼロということであり、速度がゼロであることではない。