

第 50 講 円周角と円に内接する四角形

学習目標

- 同じ弧に対する円周角が等しいことを使える。
- 円周角と、その円周角が見込む弧に対する中心角の関係を使える。
- 直径に対する円周角が 90° になることを使える。
- 円に内接する四角形の対角の和が 180° になることと、その逆を使える。

円周角は「どの弧を見ているか」が大切

円周上の点から弧を見る

円周上に 3 点 A, B, C があるとします。

$\angle ACB$ の頂点 C は円周上にあり、両辺 CA, CB は円周上の点 A, B へ伸びています。

このような角を円周角といいます。

$\angle ACB$ は、頂点 C を含まない弧 AB を見込んでいると考えます。

円周角の問題では、角だけを見るのではなく、

その角がどの 2 点を結ぶ弧を見込んでいるか

を確認することが重要です。

円周角

円周上の 1 点を頂点とし、両辺が円周と交わる角を**円周角**といいます。

たとえば $\angle ACB$ は、弧 AB に対する円周角です。

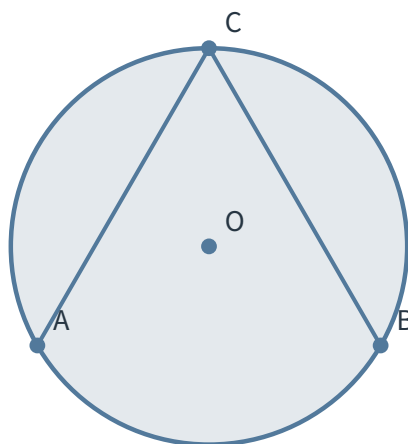


図 1 弧 AB を見込む円周角 $\angle ACB$

角と弧の対応

$\angle ACB$ なら、角の両端は A, B です。
したがって、この円周角が見込むのは弧 AB です。
頂点 C ではなく、**角の両辺が円と交わる 2 点**を見ます。

同じ弧に対する円周角は等しい

頂点が違っても見ている弧が同じなら等しい

円周上に点 A, B, C, D があり、 C, D が弧 AB の同じ側にあるとします。
 $\angle ACB$ と $\angle ADB$ は、どちらも弧 AB を見込んでいます。
したがって、

$$\angle ACB = \angle ADB$$

です。
円周角の頂点が異なっても、同じ弧を見込んでいれば角の大きさは等しくなります。

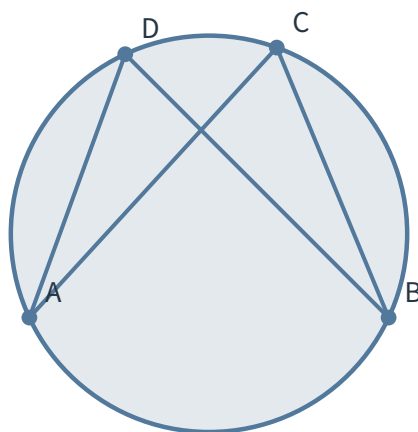


図 2 同じ弧 AB を見込む $\angle ACB$ と $\angle ADB$

同じ弧なら同じ円周角

同じ弧 AB に対する円周角はすべて等しいので、
$$\angle ACB = \angle ADB$$

です。
問題では「同じ弧を見込んでいるか」を先に確認します。

見込む弧が違えば使えない

円周上にある角だからといって、どの円周角も等しいわけではありません。
等しくなるのは、**同じ弧に対する円周角**です。

円周角は中心角の半分

同じ弧に対する中心角と比べる

円の中心を O とします。

弧 AB に対する中心角を $\angle AOB$ 、同じ弧 AB に対する円周角を $\angle ACB$ とします。

このとき、

$$\angle AOB = 2\angle ACB$$

が成り立ちます。

言い換えると、

$$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$$

です。

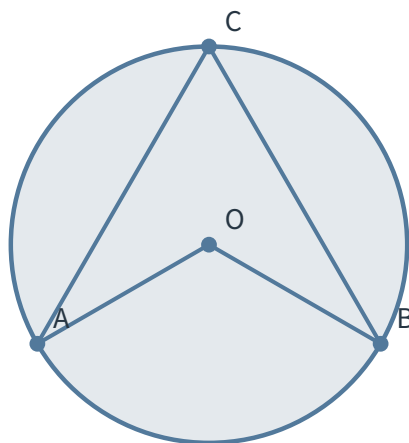


図 3 同じ弧 AB に対する中心角 $\angle AOB$ と円周角 $\angle ACB$

中心角と円周角

同じ弧に対して、

中心角 = 円周角の 2 倍

です。

したがって、

- 中心角から円周角を求める → 2 で割る
- 円周角から中心角を求める → 2 倍する

と考えます。

中心角から円周角を求める

弧 AB に対する中心角が

$$\angle AOB = 120^\circ$$

なら、同じ弧に対する円周角は、

$$120^\circ \div 2 = 60^\circ$$

です。

直径に対する円周角は 90 度

直径が作る中心角は 180 度

AB が円の直径で、 C が円周上の点であるとして。

直径 AB に対する中心角は、

$$180^\circ$$

です。

円周角は中心角の半分なので、

$$\angle ACB = 90^\circ$$

となります。

したがって、直径の両端と円周上の 1 点を結ぶと、直角三角形ができます。

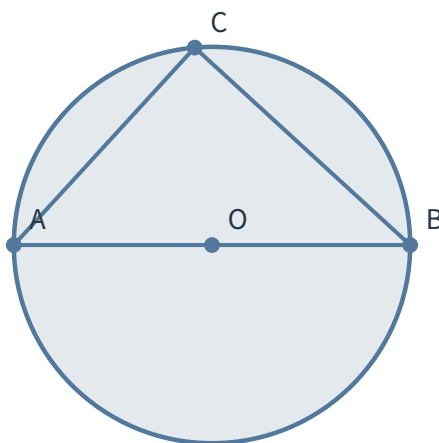


図 4 直径 AB に対する円周角 $\angle ACB$ は 90 度

直径を見つけたら直角

AB が直径で、 C が円周上にあるなら、

$$\angle ACB = 90^\circ$$

です。

図の中に直径があるときは、直径を見込む円周角を探します。

直角になる頂点を確認する

直径が AB だからといって、 $\angle A$ や $\angle B$ が 90° になるわけではありません。

直角になるのは、直径 AB を見込む円周角 $\angle ACB$ です。

円に内接する四角形

円に内接する四角形

4つの頂点がすべて1つの円周上にある四角形を、**円に内接する四角形**といいます。

対角の和は 180 度

四角形 $ABCD$ が円に内接しているとします。

$\angle A$ と $\angle C$ は、合わせると円1周分の弧を見込む円周角になります。

円1周に対応する中心角は 360° なので、円周角の和はその半分です。

したがって、

$$\angle A + \angle C = 180^\circ$$

です。

同様に、

$$\angle B + \angle D = 180^\circ$$

も成り立ちます。

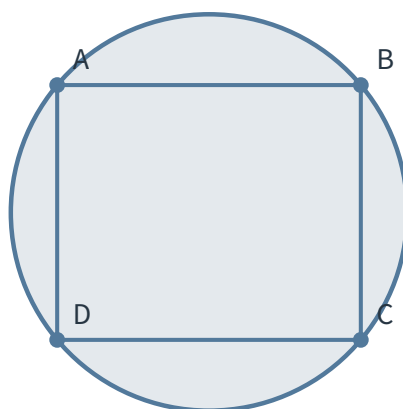


図5 円に内接する四角形 ABCD

内接四角形の対角

四角形 $ABCD$ が円に内接していれば、

$$\angle A + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle B + \angle D = 180^\circ$$

です。

「向かい合う2つの角」の和を見ることがポイントです。

対角の和が 180 度なら円に内接する

性質の逆も使える

今度は、四角形 $ABCD$ について、

$$\angle A + \angle C = 180^\circ$$

であることが分かっているとします。

このとき、4 点 A, B, C, D は同一円周上にあります。

つまり、四角形 $ABCD$ は円に内接します。

したがって、

円に内接する四角形なら対角の和は 180°

だけでなく、

対角の和が 180° なら、その四角形は円に内接する

という逆も使えます。

内接を判定する条件

四角形の一組の対角について、

$$\angle A + \angle C = 180^\circ$$

が成り立てば、四角形 $ABCD$ は円に内接します。

隣り合う角ではなく対角

円に内接する四角形で和が 180° になるのは、向かい合う角です。

たとえば $\angle A$ と $\angle C$ 、または $\angle B$ と $\angle D$ を組にします。

問題を解くときの見分け方

4 つの基本パターン

円周角の問題では、次の順に図を確認します。

1. 同じ弧を見込む円周角があるか
1. 中心角と円周角が同じ弧を見込んでいるか
1. 直径を見込む円周角があるか
1. 4 点と同じ円周上にあるか、または対角の和が 180° か

例題

例題 1

円の中心を O とし、 A, B, C は円周上の点です。

弧 AB に対する中心角が、

$$\angle AOB = 124^\circ$$

です。

同じ弧 AB に対する円周角 $\angle ACB$ を求めなさい。

例題 1 の解答・解説

同じ弧に対する中心角は円周角の 2 倍です。

したがって、

$$\angle ACB = 124^\circ \div 2 = 62^\circ$$

です。

例題 2

AB は円の直径で、点 C は円周上にあります。

$$\angle BAC = 34^\circ$$

のとき、 $\angle ABC$ を求めなさい。

例題 2 の解答・解説

直径 AB に対する円周角なので、

$$\angle ACB = 90^\circ$$

です。

三角形 ABC の内角の和より、

$$\angle ABC = 180^\circ - 90^\circ - 34^\circ$$

です。

したがって、

$$\angle ABC = 56^\circ$$

です。

例題 3

四角形 $ABCD$ は円に内接しています。

$$\angle A = 73^\circ$$

のとき、 $\angle C$ を求めなさい。

また、別の四角形 $PQRS$ について、

$$\angle P = 68^\circ, \quad \angle R = 112^\circ$$

であるとき、 $PQRS$ が円に内接すると判断できるか答えなさい。

例題 3 の解答・解説

円に内接する四角形の対角の和は 180° なので、

$$\angle C = 180^\circ - 73^\circ = 107^\circ$$

です。

また、

$$68^\circ + 112^\circ = 180^\circ$$

です。

対角の和が 180° なので、その逆より四角形 $PQRS$ は円に内接すると判断できます。

演習問題

練習問題 1

同じ弧 AB に対する 2 つの円周角 $\angle ACB$ と $\angle ADB$ があります。

$$\angle ACB = 48^\circ$$

のとき、 $\angle ADB$ を求めなさい。

練習問題 2

円の中心を O とし、 A, B, C は円周上の点です。

弧 AB に対する円周角が、

$$\angle ACB = 37^\circ$$

です。

同じ弧に対する中心角 $\angle AOB$ を求めなさい。

練習問題 3

円の中心を O とし、弧 AB に対する中心角が、

$$\angle AOB = 150^\circ$$

です。

同じ弧に対する円周角を求めなさい。

練習問題 4

AB は円の直径で、 C は円周上の点です。

$$\angle ABC = 27^\circ$$

のとき、 $\angle BAC$ を求めなさい。

練習問題 5

四角形 $ABCD$ は円に内接しています。

$$\angle B = 116^\circ$$

のとき、 $\angle D$ を求めなさい。

練習問題 6

四角形 $ABCD$ は円に内接しています。

$$\angle A = 82^\circ, \quad \angle B = 105^\circ$$

のとき、 $\angle C$ と $\angle D$ を求めなさい。

練習問題 7

四角形 $ABCD$ で、

$$\angle A = 64^\circ, \quad \angle C = 116^\circ$$

です。

四角形 $ABCD$ が円に内接すると判断できるか答え、理由を説明しなさい。

練習問題 8

四角形 $ABCD$ で、

$$\angle B = 91^\circ, \quad \angle D = 87^\circ$$

です。

この 2 つの角の値だけから、四角形 $ABCD$ が円に内接すると判断できますか。理由も答えなさい。

練習問題 9

ある生徒は、

「円に内接する四角形では、隣り合う 2 つの角の和が必ず 180° になる」

と考えました。

この考えの誤りを説明し、正しい性質を答えなさい。

演習問題の解答・解説

練習問題 1 の解答・解説

$\angle ACB$ と $\angle ADB$ は同じ弧 AB に対する円周角です。

したがって、

$$\angle ADB = \angle ACB = 48^\circ$$

です。

練習問題 2 の解答・解説

同じ弧に対する中心角は円周角の 2 倍です。

したがって、

$$\angle AOB = 2 \cdot 37^\circ = 74^\circ$$

です。

練習問題 3 の解答・解説

円周角は、同じ弧に対する中心角の半分です。

したがって、

$$150^\circ \div 2 = 75^\circ$$

です。

練習問題 4 の解答・解説

AB は直径なので、

$$\angle ACB = 90^\circ$$

です。

三角形の内角の和より、

$$\angle BAC = 180^\circ - 90^\circ - 27^\circ$$

です。

したがって、

$$\angle BAC = 63^\circ$$

です。

練習問題 5 の解答・解説

円に内接する四角形の対角の和は 180° です。

$\angle B$ と $\angle D$ は対角なので、

$$\angle D = 180^\circ - 116^\circ = 64^\circ$$

です。

練習問題 6 の解答・解説

$\angle A$ と $\angle C$ は対角なので、

$$\angle C = 180^\circ - 82^\circ = 98^\circ$$

です。

また、 $\angle B$ と $\angle D$ も対角なので、

$$\angle D = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$$

です。

練習問題 7 の解答・解説

$\angle A$ と $\angle C$ の和は、

$$64^\circ + 116^\circ = 180^\circ$$

です。

一組の対角の和が 180° なので、内接四角形の性質の逆より、四角形 $ABCD$ は円に内接すると判断できます。

練習問題 8 の解答・解説

$\angle B$ と $\angle D$ の和は、

$$91^\circ + 87^\circ = 178^\circ$$

です。

180° ではないため、この条件から四角形 $ABCD$ が円に内接すると判断することはできません。

練習問題 9 の解答・解説

円に内接する四角形で和が 180° になるのは、隣り合う角ではなく**向かい合う角**です。
したがって、正しい性質は、

$$\angle A + \angle C = 180^\circ$$

および、

$$\angle B + \angle D = 180^\circ$$

です。