

第 173 講 無限等比数列

学習目標

この講では、一定の倍率で変化する数列の極限を、倍率の範囲に注目して判断できるようになることを目標とする。

具体的には、次のことができるようになる。

- ・ 数列 r^n の極限を、 r の値によって分類できる。
- ・ $|r| < 1$ のとき、なぜ r^n が 0 に近づくのかを説明できる。

導入

数列では、項が一定の規則で変化し続けたとき、その先の値が決まるかを考える。

特に、各項が前の項に同じ数を掛けて作られる変化を考えると、倍率が小さい場合と大きい場合で全く異なる動きをする。

例えば、毎回 $\frac{1}{2}$ 倍になる数列では、 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ となり、項はどんどん 0 に近づく。

一方、毎回 2 倍になる数列では、 $1, 2, 4, 8, \dots$ となり、どれだけ先へ進んでも大きくなり続ける。

無限等比数列では、項の大きさを決める倍率 r が、極限を判断する中心になる。

無限等比数列の考え方

n を正整数、 r を実定数とする。

$r \neq 0$ のとき、 r^n

は初項 r 、公比 r の無限等比数列である。

141 講では、等比数列を各項が非零で、隣接する項の比が一定であるものとして扱った。この定義を保つため、零列を比によって等比数列と同一視しない。

一般の等比数列 ar^{n-1} を考える場合は、 a, r をともに非零実定数とする。このとき、 $r^{n-1} = \frac{r^n}{r}$ であり、 r^n の極限を考えることへ帰着できる。

ただし、初項 a の符号によって極限の向きは変化することがある。

$r = 0$ の場合は、 n が正整数であることから

$$0^n = 0$$

だけを扱い、 0^0 は用いない。

また、初項が 0 の漸化式で定まる零列は、倍率の比を用いず別に扱う。

倍率による分類

数列 r^n の極限は、倍率 r の範囲によって分類できる。

倍率の範囲	項の変化	収束・発散
$r = 0$	常に 0	0 へ収束
$0 < r < 1$	絶対値が小さくなる	0 へ収束
$-1 < r < 0$	符号が交代しながら絶対値が小さくなる	0 へ収束
$r = 1$	常に 1	1 へ収束
$r > 1$	正の方向へ大きくなる	正の無限大へ発散
$r = -1$	$-1, 1, -1, 1, \dots$ と振動する	収束しない
$r < -1$	符号が交代しながら絶対値が大きくなる	収束しない

振動する場合は、有限値への収束も、正負どちらか一方の無限大への発散も成立しない。
 重要なのは、符号の変化だけで判断しないことである。
 例えば、 $(-\frac{1}{2})^n$ は符号が交代するが、絶対値は

$$|-\frac{1}{2}|^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

となり、次第に小さくなる。そのため、数列全体は 0 に近づく。
 一方、 $(-2)^n$ は符号が交代しながら絶対値が大きくなるため、1 つの値へ近づかない。

極限を判断する軸

数列 r^n の極限では、まず $|r|$ を見る。

- $|r| < 1$ の場合は、 $r = 0$ なら常に 0 であり、それ以外では絶対値が小さくなって 0 へ近づく。
- $|r| > 1$ なら、絶対値が増大するため有限の値へ近づかない。
- $r = 1$ は一定値、 $r = -1$ は振動する。

符号の変化よりも、絶対値が縮むか大きくなるかを見ることが判断の中心である。

絶対値が 1 未満の場合の根拠

$0 < q < 1$ とする。

$$h = \frac{1}{q} - 1$$

とおくと、 $h > 0$ であり、 $q = \frac{1}{1+h}$ となる。

まず、

$$(1+h)^n \geq 1 + nh$$

を確認する。

$$n = 1 \text{ のとき、} (1+h)^1 = 1+h = 1+1 \cdot h$$

で成立する。

任意に固定した正整数 k について $n = k$ で成り立つと仮定すると、

$$(1+h)^{k+1} \geq (1+kh)(1+h) = 1 + (k+1)h + kh^2 \geq 1 + (k+1)h$$

である。

よって帰納的に成立する。

したがって、

$$0 < q^n = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+nh}$$

である。

右辺は、

$$\frac{1}{1+nh} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + h}$$

と変形できる。 n が無限に大きくなると、 $\frac{1}{n}$ は 0 へ近づき、分母は $h > 0$ へ近づくため、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+nh} = 0$$

である。

したがって、はさみうちの原理より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$$

となる。

負の倍率では、 $-1 < r < 0$ のとき

$$-|r|^n \leq r^n \leq |r|^n$$

であり、はさみうちの原理から r^n は 0 へ近づく。

また、 $r = 0$ の場合は常に 0 である。

倍率が 1 より大きい場合

$r > 1$ とする。

$$r = 1 + h$$

とおくと、 $h > 0$ である。

先ほど示した不等式より、

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh$$

である。

任意の正の数 M に対して、 $N > \frac{M-1}{h}$ となる正整数 N を選ぶ。

このとき、すべての $n \geq N$ について、

$$r^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh \geq 1 + Nh > M$$

となる。

したがって、後続するすべての項が任意の大きな値を超えるため、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = +\infty$$

である。

振動する場合の注意

$r = -1$ の場合、奇数番目の項は -1 、偶数番目の項は 1 となる。

任意に大きな番号まで進んでも、 -1 と 1 の両方が現れるため、共通する有限の極限值は存在しない。また、絶対値は一定なので、正負どちらか一方の無限大へ発散することもない。

$r < -1$ の場合、 $s = -r$

とおくと、 $s > 1$ である。

このとき、奇数番目の項は $-s^n$

偶数番目の項は s^n となる。

それぞれの部分列は限りなく大きさを増し、しかも任意の先にも両方が現れる。そのため、全数列は有限値へ収束せず、正負どちらか一方の無限大へ発散することもない。

例題 1

数列 $(\frac{2}{3})^n$ の極限を求めなさい。

例題 1 の解答・解説

倍率は $r = \frac{2}{3}$ である。

ここで、 $|\frac{2}{3}| < 1$ だから、絶対値は次第に小さくなる。

したがって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

である。

この場合は倍率 $\frac{2}{3}$ の絶対値が 1 より小さいので、極限は 0 となる。

例題 2

一般項 $b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ で定まる数列 $\{b_n\}$ の極限を求めなさい。

例題 2 の解答・解説

倍率は $r = -\frac{1}{2}$ である。

負の倍率なので符号は交代する。しかし、

$$\left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} < 1$$

であるため、絶対値は小さくなっていく。

したがって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

である。

符号が交代することだけを見て「発散」と判断してはいけない。絶対値が縮小しているかどうかを確認することが重要である。

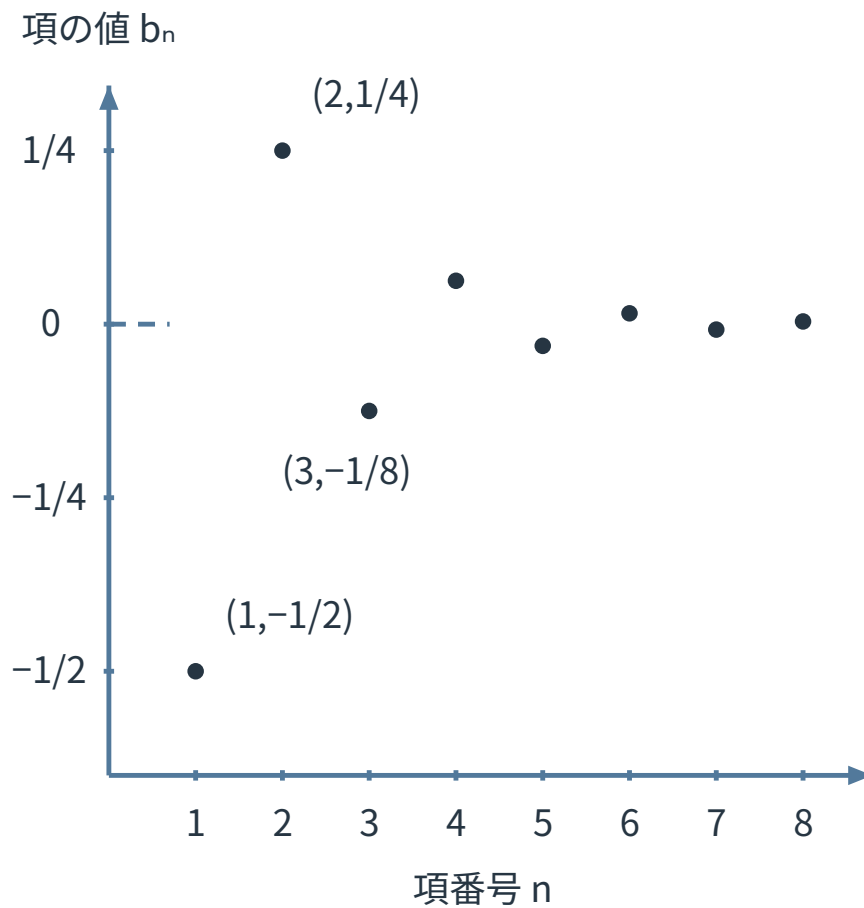


図1 黒点は数列 $b_n = (-1/2)^n$ の初めの8項であり、点は連結していない。奇数項は負、偶数項は正で、絶対値が小さくなる。第8項も $1/256 > 0$ であり、0そのものを項として置いていない。項番号の目盛は下部に置き、0の高さは縦軸の目盛で示した。全項の収束はこの8点だけで判断せず、本文の一般式から説明する。縦横の縮尺は異なる。

例題3

次の数列について、収束するか発散するかを理由とともに判断しなさい。

- (1) 3^n
- (2) $(-2)^n$
- (3) $(-1)^n$

例題 3 の解答・解説

(1) 倍率は $r = 3$ であり、 $r > 1$ である。

したがって、項は正の方向へ限りなく大きくなり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3^n = +\infty$$

となる。

(2) 倍率は $r = -2$ であり、 $|r| = 2 > 1$ である。

絶対値は大きくなるが、符号は交代する。

そのため、正負どちらかの無限大へ向かうことも、有限の値へ近づくこともなく、発散する。

(3)

$n = 1$ から順に並べると、 $(-1)^n$ は $-1, 1, -1, 1, \dots$ となる。

奇数番目と偶数番目の項が、任意の先でも -1 と 1 になるため振動し、収束しない。

演習問題

練習問題 1

数列 $(\frac{3}{4})^n$ の極限を求めなさい。

練習問題 2

数列 $(-\frac{2}{3})^n$ の極限を求めなさい。

練習問題 3

数列 $5(\frac{1}{2})^{n-1}$ の極限を求めなさい。

練習問題 4

数列 $-2 \cdot 3^{n-1}$ について、発散の向きとその理由を説明しなさい。

練習問題 5

数列 $(-3)^n$

が収束するか発散するかを判断し、その理由を説明しなさい。

練習問題 6

次の数列について、極限を求めなさい。

(1)

1^n

(2)

0^n

ただし、 n は正整数である。

また、 0^n の考え方について、 0^0 を使わずに説明しなさい。

練習問題 7

実数 r について、数列 r^n
が有限の値に収束するための必要十分条件を答えなさい。
ただし、境界となる $r = 1$ と $r = -1$ の違いも説明しなさい。

練習問題 8

数列 (a_n) を、 $a_1 = 0$
かつ、すべての正整数 n について $a_{n+1} = 3a_n$
で定める。
この数列の極限を求めなさい。また、「倍率が 3 だから正の無限大になる」という判断が誤りである理由を説明しなさい。

練習問題 1 の解答・解説

倍率は $r = \frac{3}{4}$ である。
このとき、 $|r| = \frac{3}{4} < 1$ であるため、絶対値は次第に小さくなる。
したがって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

である。
倍率の絶対値が 1 より小さい場合は、項が 0 へ近づくと判断する。

練習問題 2 の解答・解説

倍率は $r = -\frac{2}{3}$ である。
符号は交互に変化するが、 $|r| = \frac{2}{3} < 1$ である。
したがって、絶対値は 0 へ近づき、符号の交代の影響も小さくなる。
よって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

である。
負の倍率でも、絶対値が 1 未満なら収束する。

練習問題 3 の解答・解説

数列は $5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ である。
指数をそろえると、

$$5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 10\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

となる。
ここで、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

であるから、有限定数倍の法則より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 10\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

となる。
したがって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$$

である。

練習問題 4 の解答・解説

数列は $-2 \cdot 3^{n-1}$ である。
倍率は 3 であり、 $3 > 1$ であるため、 3^{n-1}
は正の無限大へ向かう。
さらに係数が -2 であるため、全体の符号が反転する。
したがって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-2 \cdot 3^{n-1}) = -\infty$$

である。
倍率が 1 より大きい場合でも、初項の係数が負なら発散の向きは負になる。

練習問題 5 の解答・解説

倍率は $r = -3$ である。
このとき、 $|r| = 3 > 1$ であるため、絶対値は大きくなる。
また、 $(-3)^n$
は奇数の n では負、偶数の n では正になる。
したがって、項は符号を交代させながら絶対値が増加する。
奇数番目だけを見ると負の方向へ大きくなり、偶数番目だけを見ると正の方向へ大きくなるため、1
つの値へ近づかない。
よって、この数列は発散する。

練習問題 6 の解答・解説

(1)

$1^n = 1$ であり、すべての正整数 n で一定である。

したがって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = 1$$

である。

(2)

n は正整数なので、 $0^n = 0$ である。

したがって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0^n = 0$$

である。

ここで、 n は 1 以上の整数であるため、 0^0 を考える必要はない。

また、等比数列の基本的な定義では各項が非零で隣接する項の比が一定であることを扱うため、零列を比 $\frac{0}{0}$ によって等比数列と考えることはできない。

0^n は倍率による等比数列の比の議論ではなく、累乗による数列として扱う。

練習問題 7 の解答・解説

数列 r^n

が有限値に収束する条件を考える。

$r = 0$ の場合、常に 0 であるため収束する。

$0 < r < 1$ の場合、絶対値が小さくなり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$$

となる。

$-1 < r < 0$ の場合も、絶対値が小さくなり、符号が交代しながら 0 へ近づく。

$r = 1$ の場合は、 $1^n = 1$ であり収束する。

一方、 $r = -1$ の場合は、奇数番目と偶数番目で -1 と 1 を繰り返すため振動する。

$r > 1$ の場合は正の無限大へ発散し、 $r < -1$ の場合は符号を交代しながら絶対値が増加するため収束しない。

したがって、有限値に収束する必要十分条件は、

$$-1 < r \leq 1$$

である。

練習問題 8 の解答・解説

初項は $a_1 = 0$ である。

$a_k = 0$ とすると、漸化式より、 $a_{k+1} = 3a_k = 0$ となる。

したがって、数学的帰納法により、すべての正整数 n で

$a_n = 0$ である。

よって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

である。

倍率が 3 であることだけを見て正の無限大になると判断してはいけない。非零初項の場合でも、初項が正であるという条件があって初めて正の無限大へ向かう。初項が負なら負の無限大へ向かう。

この数列では各項が 0 であるため、隣接する項の比は定義されない。本講で扱う非零比による等比数列の定義とは区別する。