

第 77 講 三次式の展開

学習目標

- ・ 三次式の展開公式を、分配法則と二次式の展開から導ける。
- ・ $(a+b)^3$ と $(a-b)^3$ を正しい係数と符号で展開できる。
- ・ $(a+b)(a^2-ab+b^2)$ と $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ を展開できる。
- ・ 文字や数が置き換わった式でも、公式の各部分に対応させて展開できる。
- ・ 展開後の項を次数の高い順に整理し、計算ミスを確認できる。

三次式の展開とは何か

三次の式でも基本は分配法則である

数学 I では、

$$(a+b)^2$$

や、

$$(a-b)^2$$

の展開を扱った。

数学 II では、これを三乗まで広げて、

$$(a+b)^3$$

のような式を展開する。

三次式であっても、基本となる考え方は分配法則である。

公式だけを暗記するのではなく、二次式の展開を利用して導けることを理解することが重要である。

三乗を二乗と一次式に分ける

たとえば、

$$(a+b)^3$$

は、

$$(a+b)^2(a+b)$$

と考えられる。

先に二乗部分を展開し、そのあと分配法則を使えばよい。

$(a+b)^3$ の展開

二次式の展開から導く

まず、

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b)$$

とする。

二次式の展開公式より、

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

なので、

$$(a + b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)$$

となる。
分配法則を使うと、

$$a(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 2a^2b + ab^2$$

であり、

$$b(a^2 + 2ab + b^2) = a^2b + 2ab^2 + b^3$$

である。
同類項をまとめると、

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

となる。

和の三乗の展開公式

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

係数は 1、3、3、1 である

$(a + b)^3$ の展開では、各項の係数が、

$$1, 3, 3, 1$$

と並ぶ。
また、 a の指数は、

$$3, 2, 1, 0$$

と 1 ずつ減り、 b の指数は、

$$0, 1, 2, 3$$

と 1 ずつ増える。

$(a - b)^3$ の展開

b を引くので符号に注意する

まず、

$$(a - b)^3 = (a - b)^2(a - b)$$

とする。
二次式の展開公式より、

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

なので、

$$(a - b)^3 = (a^2 - 2ab + b^2)(a - b)$$

となる。
 a を掛けた部分は、

$$a^3 - 2a^2b + ab^2$$

である。
 $-b$ を掛けた部分は、

$$-a^2b + 2ab^2 - b^3$$

である。
 同類項をまとめると、

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

となる。

差の三乗の展開公式

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

符号はすべて交互ではない

$(a - b)^3$ の展開は、

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

である。
 符号は、

$$+, -, +, -$$

と並ぶ。
 特に第 3 項の、

$$3ab^2$$

は正である。
 b が二乗されることで負の符号が消えるためである。

2 つの三乗公式を比較する

形を並べて覚える

2 つの公式を並べると、共通点と違いが見えやすい。

式	展開結果
$(a + b)^3$	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a - b)^3$	$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

係数の大きさはどちらも、

$$1, 3, 3, 1$$

である。
 違うのは符号である。

項の並べ方

三次式の展開では、

$$a^3, \quad a^2b, \quad ab^2, \quad b^3$$

の順に並べると整理しやすい。

各項では a と b の指数の和が 3 になっている。

 $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$ の展開**すべての項に分配する**

次に、

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

を展開する。

まず a を掛けると、

$$a^3 - a^2b + ab^2$$

である。

次に b を掛けると、

$$a^2b - ab^2 + b^3$$

である。

これらを加えると、

$$a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3$$

となる。

ここで、

$$-a^2b + a^2b = 0$$

であり、

$$ab^2 - ab^2 = 0$$

である。

したがって、

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

となる。

和を含む三次式の展開公式

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

中間の項が打ち消し合う

この展開では、 a^2b の項と ab^2 の項がそれぞれ打ち消し合う。
そのため、展開結果には、

$$a^3 + b^3$$

だけが残る。

 $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ の展開**マイナスを分配するときに注意する**

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

を展開する。
 a を掛けると、

$$a^3 + a^2b + ab^2$$

である。
 $-b$ を掛けると、

$$-a^2b - ab^2 - b^3$$

である。
加えると、

$$a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3$$

となる。
中間の項が打ち消し合うので、

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

となる。

差を含む三次式の展開公式

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

かっこの中の符号を混同しない

次の2つを区別する必要がある。

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

最初のかっこが和なら、2 目のかっこの中央は負である。
最初のかっこが差なら、2 目のかっこの中央は正である。

4つの公式を整理する

三次式の基本公式

この講で扱う展開公式は次の4つである。

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

文字や数が変わっても同じ形で考える

aとbに何が入るかを確認する

たとえば、

$$(x+2)^3$$

では、

$$a = x, \quad b = 2$$

と考える。

公式に当てはめると、

$$(x+2)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 + 2^3$$

である。

したがって、

$$(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

となる。

数字を代入したあとは、係数と累乗を正確に計算する必要がある。

3abの形ではない

$(a+b)^3$ の中央の項は、

$$3a^2b$$

と、

$$3ab^2$$

である。

指数を落として、

$$3ab$$

としてはいけない。

展開後の各項の次数が3になっているか確認すると、指数の誤りに気付きやすい。

展開後の確認

3つの確認ポイント

三次式を展開したあとは、次を確認するとよい。

1. 係数が正しいか。
2. 正負の符号が正しいか。
3. 項が次数の高い順に整理されているか。

特に $(a - b)^3$ では符号、数を含む式では係数の計算に注意する。

例題

例題 1

次の式を展開せよ。

$$(x + 3)^3$$

例題 1 の解答・解説

公式、

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

を用いる。

ここで、

$$a = x, \quad b = 3$$

である。

したがって、

$$(x + 3)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot 3 + 3x \cdot 3^2 + 3^3$$

となる。

整理すると、

$$(x + 3)^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$$

である。

例題 2

次の式を展開せよ。

$$(2x - 1)^3$$

例題 2 の解答・解説

公式、

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

を用いる。

ここで、

$$a = 2x, \quad b = 1$$

である。

したがって、

$$(2x - 1)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2 + 3(2x) - 1$$

となる。

それぞれ計算すると、

$$(2x)^3 = 8x^3$$

$$3(2x)^2 = 12x^2$$

である。

よって、

$$(2x - 1)^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$$

である。

例題 3

次の式を展開せよ。

$$(x + 4)(x^2 - 4x + 16)$$

例題 3 の解答・解説

式は、

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

の形である。

ここで、

$$a = x, \quad b = 4$$

である。

したがって、

$$(x + 4)(x^2 - 4x + 16) = x^3 + 4^3$$

となる。

よって、

$$(x + 4)(x^2 - 4x + 16) = x^3 + 64$$

である。

分配法則で直接展開しても、中間の項が打ち消し合って同じ結果になる。

演習問題

練習問題 1

次の式を展開せよ。

$$(x + 1)^3$$

練習問題 2

次の式を展開せよ。

$$(x - 2)^3$$

練習問題 3

次の式を展開せよ。

$$(2x + 3)^3$$

練習問題 4

次の式を展開せよ。

$$(3x - 2)^3$$

練習問題 5

次の式を展開せよ。

$$(x + 5)(x^2 - 5x + 25)$$

練習問題 6

次の式を展開せよ。

$$(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$$

練習問題 7

次の式を展開せよ。

$$(a + 2b)^3$$

練習問題 8

ある生徒は、

$$(x - 4)^3 = x^3 - 12x^2 - 48x - 64$$

と展開した。

誤りを指摘し、正しく展開せよ。

練習問題 9

次の計算の空欄に入る式を求めよ。

$$(y - 5)(y^2 + 5y + 25) = \text{空欄}$$

また、分配法則で展開したときに中間の項が消えることを確認せよ。

演習問題の解答・解説**練習問題 1 の解答・解説**

公式に $a = x$, $b = 1$ を当てはめる。

$$(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

である。

練習問題 2 の解答・解説

公式、

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

に $a = x$, $b = 2$ を当てはめる。

$$(x - 2)^3 = x^3 - 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 - 2^3$$

である。

したがって、

$$(x - 2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

である。

練習問題 3 の解答・解説

$a = 2x$, $b = 3$ と考える。

$$(2x + 3)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2 \cdot 3 + 3(2x) \cdot 3^2 + 3^3$$

である。

各項を計算すると、

$$(2x + 3)^3 = 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$$

である。

練習問題 4 の解答・解説

$a = 3x$, $b = 2$ と考える。

$$(3x - 2)^3 = (3x)^3 - 3(3x)^2 \cdot 2 + 3(3x) \cdot 2^2 - 2^3$$

である。

したがって、

$$(3x - 2)^3 = 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$$

である。

練習問題 5 の解答・解説

式は、

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

の形である。

$a = x$, $b = 5$ とすれば、

$$(x + 5)(x^2 - 5x + 25) = x^3 + 5^3$$

である。

したがって、

$$(x + 5)(x^2 - 5x + 25) = x^3 + 125$$

である。

練習問題 6 の解答・解説

式は、

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

の形である。

ここで、

$$a = 2x, \quad b = 3$$

とすると、

$$a^2 = 4x^2, \quad ab = 6x, \quad b^2 = 9$$

となり、与えられた式と一致する。

したがって、

$$(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9) = (2x)^3 - 3^3$$

である。

よって、

$$(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9) = 8x^3 - 27$$

である。

練習問題 7 の解答・解説

a はそのまま、公式の b に $2b$ を当てはめる。

$$(a + 2b)^3 = a^3 + 3a^2(2b) + 3a(2b)^2 + (2b)^3$$

である。

したがって、

$$(a + 2b)^3 = a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$$

である。

練習問題 8 の解答・解説

$(x - 4)^3$ の展開では、第 3 項の符号は正になる。

公式より、

$$(x - 4)^3 = x^3 - 3x^2 \cdot 4 + 3x \cdot 4^2 - 4^3$$

である。

したがって、

$$(x - 4)^3 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$$

である。

生徒の式では、 $48x$ の符号を負にしたことが誤りである。

練習問題 9 の解答・解説

公式より、

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

である。

$a = y$, $b = 5$ とすると、

$$(y - 5)(y^2 + 5y + 25) = y^3 - 125$$

となる。

したがって、空欄は、

$$y^3 - 125$$

である。

分配法則で確認すると、

$$y(y^2 + 5y + 25) = y^3 + 5y^2 + 25y$$

であり、

$$-5(y^2 + 5y + 25) = -5y^2 - 25y - 125$$

である。

加えると、

$$y^3 + 5y^2 + 25y - 5y^2 - 25y - 125$$

となる。

$5y^2$ と $-5y^2$ 、 $25y$ と $-25y$ がそれぞれ打ち消し合うので、 $y^3 - 125$ が残る。