第 197 講 最大・最小

学習目標

- 定義域全体での最大値・最小値と、それをとるすべての x を求めることができる。
- 局所極値と定義域全体での最大値・最小値の違いを説明できる。
- 閉区間での最大値・最小値の存在条件を説明し、端点と内部の候補の関数値を比較できる。

最大値・最小値を考える視点

局所極値は、その点の近くにある値との比較で決まる。一方、最大値・最小値は定義域全体のすべての値との比較で決まる。

例えば、$f(x)=x^3-3x$ を $-2\le x\le 3$ で考える。導関数が 0 になる内点 $x=-1$ では局所的な極大値 2 をとるが、右端 $x=3$ では値 18 となり、こちらの方が大きい。

したがって、この範囲での最大値は 18 であり、$x=3$ のときに達成される。また、最小値は -2 であり、$x=-2,1$ の 2 つの点で達成される。

このように、局所極値だけを調べるのではなく、定義域全体の候補を比較することが重要である。

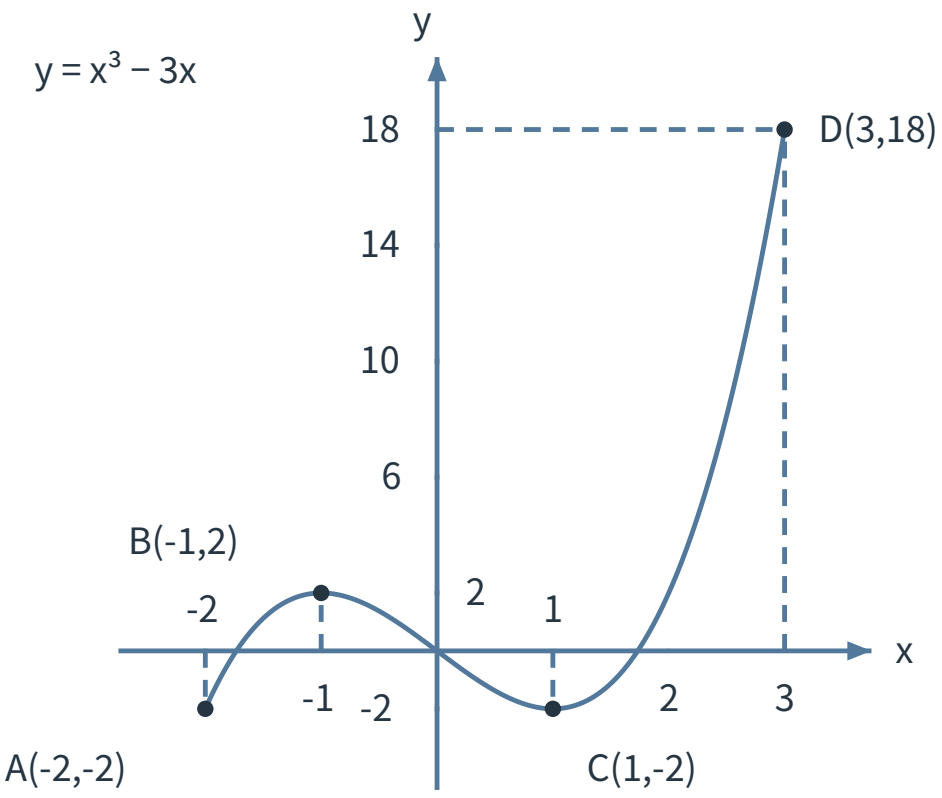

図 1　$f(x)=x^3-3x$ を $-2\le x\le 3$ で比べる。局所極大点 $B(-1,2)$ より右端 $D(3,18)$ の値が大きい。最小値 -2 は $A(-2,-2)$ と $C(1,-2)$ で達成される。横軸と縦軸の単位長は異なる。

©ミライコーチング

最大値・最小値

空でない比較範囲を D とし、a を D に属する実数とする。 関数 $f(x)$ が D 上で最大値 $f(a)$ をもつとは、D に属するすべての x について $f(x) \leq f(a)$ が成り立つことである。
このとき、最大値は $f(a)$、それをとる x は a であり、グラフ上では点 $(a, f(a))$ に対応する。
最小値についても同様に、D に属するすべての x について $f(a) \leq f(x)$ が成り立つとき、最小値は $f(a)$ である。 同じ最大値や最小値を複数の x でとる場合もあるため、値だけでなく、それをとるすべての x を確認する必要がある。

最大値・最小値の候補

有限実数 $a < b$ について、閉区間 $[a, b]$ 上で連続な関数を考える。 区間内部で導関数が 0 になる点と微分できない点が合わせて有限個である場合、最大値・最小値の候補は、端点 a, b、区間内部で導関数が 0 になる点、区間内部で微分できない点である。
閉区間上の連続関数は最大値と最小値をもつため、これらの候補を調べれば比較できる。 関数が微分可能な内点 c で全体の最大値または最小値をとるなら、その点で局所的な極大値または局所的な極小値をとる。したがって $f'(c) = 0$ となる。
このため候補から漏れない。 ただし、候補に含まれる点が必ず最大値や最小値をとるとは限らないため、最後に関数値を比較する必要がある。

閉区間での存在

有限実数 $a < b$ について、閉区間 $[a, b]$ 全体で連続な関数を考える。 このとき、その関数は最大値と最小値をもつ。
この定理では、端点での連続性は片側からの連続性を含めて考える。 証明はここでは扱わない。
この条件は最大値と最小値が存在するための十分条件であり、開区間などでも最大値や最小値が存在する場合はある。
関数 $f(x) = x$ を $0 < x < 1$ で考えると、値域は $0 < f(x) < 1$ である。$x \to 0^+$ では $f(x) \to 0$、$x \to 1^-$ では $f(x) \to 1$ となるが、どちらの値も実際には達成されないため、最大値も最小値も存在しない。



図 2　開区間 $0 < x < 1$ の左右白丸は端点を含まない。

最大・最小を求める手順

有限実数 $a < b$ の閉区間 $[a, b]$ で連続な関数を考え、区間内部の導関数が 0 になる点と微分できない点が有限個の場合は、次の手順で調べる。
1. 閉区間上で連続であることを確認する。

2. 端点、内部で導関数が 0 になる点、内部で微分できない点を候補として列挙する。
3. 各候補の関数値を比較する。
4. 最大値・最小値と、それらをとるすべての x を結論として示す。

ただし、候補が無限個になる場合や、関数値が一定になる区間を含む場合には、有限個の候補比較だけを適用しない。
その場合は、区間ごとの増減や値域を調べて、最大値・最小値が存在するかを判断する必要がある。
また、開区間や非有界区間では、増減だけでなく境界での極限値が実際に達成されるかも確認する。

例題 1

関数 $f(x) = x^2 - 4x + 1$ の区間 $0 \leq x \leq 5$ における最大値と最小値、およびそれらをとる x を求めよ。

例題 1 の解答・解説

関数 $f(x) = x^2 - 4x + 1$ は閉区間 $0 \leq x \leq 5$ 上で連続であり、区間内部では微分可能である。
導関数は $f'(x) = 2x - 4$ である。導関数が 0 になる点を調べると、$f'(x) = 0$ より $x = 2$ である。
最大値・最小値の候補は端点 $x = 0, 5$ と内部の点 $x = 2$ である。 候補の値は次の通りである。

$$f(0) = 1$$

$$f(2) = -3$$

$$f(5) = 6$$

したがって、最大値は 6 であり、$x = 5$ のときにとる。最小値は -3 であり、$x = 2$ のときにとる。

©ミライコーチング

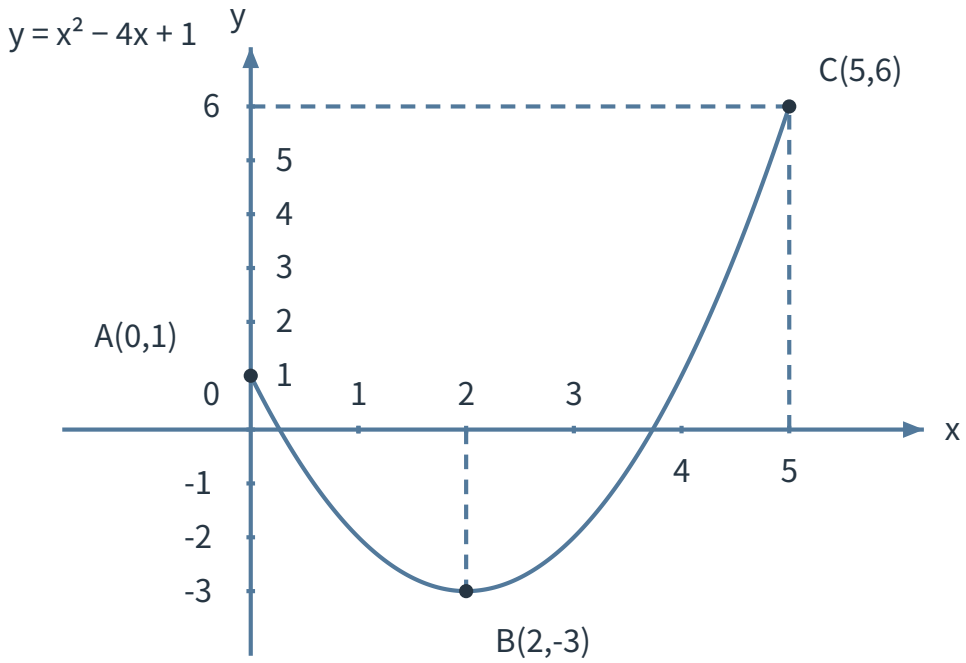

図 3　$f(x) = x^2 - 4x + 1$ を $0 \leq x \leq 5$ で比べる。端点 $A(0,1)$、$C(5,6)$ と内部の点 $B(2,-3)$ の値を比較する。横軸と縦軸の単位長は異なる。

例題 2

関数 $f(x) = x + \frac{4}{x}$ の区間 $1 \leq x \leq 4$ における最小値を求めよ。

例題 2 の解答・解説

関数 $f(x) = x + \frac{4}{x}$ は正の閉区間 $1 \leq x \leq 4$ 上で連続であり、区間内部では微分可能である。
導関数は次の通りである。

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$$

導関数が 0 になる点を、正の範囲で方程式 $1 - \frac{4}{x^2} = 0$ を解いて調べると、$x = 2$ である。
最大値・最小値の候補は $x = 1, 2, 4$ である。候補の値は次の通りである。

$$f(1) = 5$$

$$f(2) = 4$$

$$f(4) = 5$$

したがって、最小値は 4 であり、$x = 2$ のときにとる。

例題 3

関数 $f(x) = \log x - x$ について、$\log x$ は自然対数（底が e の対数）を表し、e は自然対数の底である。
区間 $1 \leq x \leq e^2$ における最大値と、それをとる x を求めよ。

例題 3 の解答・解説

ここで、$\log x$ は自然対数を表す。 関数 $f(x) = \log x - x$ は区間 $1 \leq x \leq e^2$ 上で連続であり、区間内部では微分可能である。
導関数は次の通りである。

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1$$

区間内部の x では $\frac{1}{x} - 1 < 0$ であるため、関数は区間全体で減少する。
端点の値は次の通りである。

$$f(1) = -1$$

$$f(e^2) = 2 - e^2$$

減少関数であるため、最大値は左端で達成される。 したがって、最大値は -1 であり、$x = 1$ のときにとる。

演習問題 1

関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ の区間 $0 \leq x \leq 3$ における最大値と最小値、およびそれらをとるすべての x を求めよ。

演習問題 2

関数 $f(x) = \sin x$ について、角は弧度法で表す。
区間 $0 \leq x \leq 2\pi$ における最大値と最小値、およびそれらをとるすべての x を求めよ。

演習問題 3

関数 $f(x) = e^x - 2x$ について、e は自然対数の底である。
区間 $0 \leq x \leq 2$ における最大値と最小値、およびそれらをとるすべての x を求めよ。
なお、数値比較では既知の評価 $\frac{5}{2} < e < 3$ を用いてよい。

演習問題 4

関数 $f(x) = \log x - x$ について、$\log x$ は自然対数を表し、e は自然対数の底である。
区間 $1 \leq x \leq e$ における最大値と最小値、およびそれらをとるすべての x を求めよ。

©ミライコーチング

演習問題 5

関数 $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$ の区間 $1 \leq x \leq 4$ における最大値と最小値、およびそれらをとるすべての x を求めよ。

演習問題 6

関数 $f(x)=|\,x-2\,|+x$ の区間 $0 \leq x \leq 4$ における最大値と最小値、およびそれらをとるすべての x を求めよ。

演習問題 7

関数 $f(x)=x^2$ の区間 $0<x<2$ における最大値と最小値の有無を調べ、存在する場合はその値とそれをとる x を求めよ。

演習問題 8

関数 $f(x)=\frac{1}{x}$ の区間 $0<x \leq 3$ における最大値と最小値の有無を調べ、存在する場合はその値とそれをとる x を求めよ。

演習問題 1 の解答・解説

関数 $f(x)=x^3-3x^2+2$ は閉区間 $0 \leq x \leq 3$ 上で連続であり、区間内部では微分可能である。
導関数は $f'(x)=3x^2-6x$ であり、$f'(x)=0$ より $x=0,2$ となる。区間内部の候補は $x=2$ であり、端点は $x=0,3$ である。
候補の値は次の通りである。

$$f(0)=2$$

$$f(2)=-2$$

$$f(3)=2$$

したがって、最大値は 2 であり、$x=0,3$ のときにとる。最小値は -2 であり、$x=2$ のときにとる。

©ミライコーチング

演習問題 2 の解答・解説

関数 $f(x) = \sin x$ は閉区間 $0 \leq x \leq 2\pi$ 上で連続であり、区間内部では微分可能である。ここで角は弧度法で表す。
導関数は $f'(x) = \cos x$ である。$f'(x) = 0$ より、区間内部の候補は $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ である。
端点と候補点の値は次の通りである。

$$f(0) = 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$$

$$f(2\pi) = 0$$

したがって、最大値は 1 であり、$x = \frac{\pi}{2}$ のときにとる。最小値は -1 であり、$x = \frac{3\pi}{2}$ のときにとる。

演習問題 3 の解答・解説

ここで、log は自然対数を表し、e はその底である。 関数 $f(x) = e^x - 2x$ は閉区間 $0 \leq x \leq 2$ 上で連続であり、区間内部では微分可能である。
導関数は $f'(x) = e^x - 2$ である。$f'(x) = 0$ より、$x = \log 2$ となる。
既知の評価 $\frac{5}{2} < e < 3$ より、$0 < \log 2 < 1 < 2$ である。したがって、候補は $x = 0, \log 2, 2$ である。
候補の値は次の通りである。

$$f(0) = 1$$

$$f(\log 2) = 2 - 2\log 2$$

$$f(2) = e^2 - 4$$

また、端点の値について、$e > \frac{5}{2}$ から次の評価が得られる。

$$\begin{aligned} e^2 - 4 &> \frac{25}{4} - 4 \\ &= \frac{9}{4} > 1 \end{aligned}$$

$0 < x < \log 2$ では $f'(x) < 0$、$\log 2 < x < 2$ では $f'(x) > 0$ であるため、$x = \log 2$ で最小値をとる。
したがって、最大値は $e^2 - 4$ であり、$x = 2$ のときにとる。最小値は $2 - 2\log 2$ であり、$x = \log 2$ のときにとる。

演習問題 4 の解答・解説

ここで $\log x$ は自然対数を表し、e は自然対数の底である。 関数 $f(x) = \log x - x$ は閉区間 $1 \leq x \leq e$ 上で連続であり、区間内部では微分可能である。
導関数は次の通りである。

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1$$

区間内部では $1 < x < e$ であり、$f'(x) < 0$ となるため、関数は減少する。
端点の値は次の通りである。

$$f(1) = -1$$

$$f(e) = 1 - e$$

したがって、最大値は -1 であり、$x = 1$ のときにとる。最小値は $1 - e$ であり、$x = e$ のときにとる。

演習問題 5 の解答・解説

関数 $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ は閉区間 $1 \leq x \leq 4$ 上で連続であり、区間内部では微分可能である。
まず、関数を $f(x) = x + \frac{1}{x}$ と変形する。 導関数は $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ である。
区間内部は $1 < x < 4$ であり、この範囲では $1 - \frac{1}{x^2} > 0$ であるため、関数は区間全体で厳密に増加する。
したがって、最大値は右端で達成される。 候補の値は次の通りである。

$$f(1) = 2$$

$$f(4) = \frac{17}{4}$$

したがって、最大値は $\frac{17}{4}$ であり、$x = 4$ のときにとる。最小値は 2 であり、$x = 1$ のときにとる。

演習問題 6 の解答・解説

関数 $f(x) = |\, x - 2 \,| + x$ は閉区間 $0 \leq x \leq 4$ 上で連続である。
$0 \leq x \leq 2$ では $|\, x - 2 \,| = 2 - x$ であるため、$f(x) = 2$ となる。 $2 \leq x \leq 4$ では $|\, x - 2 \,| = x - 2$ であるため、$f(x) = 2x - 2$ となる。
$x = 2$ では左右の傾きが 0 と 2 で異なるため、微分できない。
有限個の候補を比較するだけでなく、各区間の変化を確認する。 $0 \leq x \leq 2$ では値が一定であり、$2 \leq x \leq 4$ では増加するため、区間全体の値域は $2 \leq f(x) \leq 6$ となる。
したがって、最大値は 6 であり、$x = 4$ のときにとる。最小値は 2 であり、$0 \leq x \leq 2$ のすべての x でとる。

演習問題 7 の解答・解説

関数 $f(x) = x^2$ は区間 $0 < x < 2$ で連続であり、内部では微分可能である。
導関数は $f'(x) = 2x$ であり、区間内では常に $f'(x) > 0$ となるため、関数は厳密に増加する。
区間内では $0 < f(x) < 4$ である。 x が 0 に近づくと $f(x)$ は 0 に近づき、x が 2 に近づくと $f(x)$ は 4 に近づくが、$x = 0$ と $x = 2$ は定義域に含まれないため、これらの値は達成されない。
また、どの内点を選んでも、その左右にはより小さい値やより大きい値をとる点が存在するため、区間内部で最大値や最小値をとることもない。
したがって、この区間では最大値も最小値も存在しない。

©ミライコーチング

演習問題 8 の解答・解説

関数 $f(x) = \frac{1}{x}$ は区間 $0 < x \leq 3$ で連続であり、内部では微分可能である。
導関数は次の通りである。

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

区間内部では $f'(x) < 0$ であるため、関数は減少する。
したがって、最小値は右端で達成される。 $x = 3$ のとき、値は $\frac{1}{3}$ である。
定義域内で x を 0 へ右側から近づけると、$f(x)$ は正の無限大へ発散する。そのため関数値は上に有界ではない。 したがって最大値は存在しない。
以上より、最小値は $\frac{1}{3}$ であり、$x = 3$ のときにとる。