第 250 講 2 点間の距離と複素数

学習目標

- 複素数平面上の 2 点間の距離を、2 つの複素数の差の絶対値で表せる。
- 差が表す移動を、座標の差やベクトルと結び付けて説明できる。
- 差を取る順序を逆にしても距離が変わらない理由を説明できる。
- 距離の条件から、点の位置や未知数を求められる。

1. 2 点間の距離は差の絶対値である

始点を原点へ移して考える

複素数 $\alpha = a + bi$、$\beta = c + di$ に対応する点をそれぞれ $A(a, b)$、$B(c, d)$ とする。A から B へ進むとき、実軸方向には $c - a$、虚軸方向には $d - b$ だけ進む。この移動を表す複素数は

$$\beta - \alpha = (c - a) + (d - b)i$$

である。
ここで、平面全体を $-\alpha$ だけ平行移動すると、A は原点へ、B は $\beta - \alpha$ に対応する点へ移る。平行移動では長さが変わらないので、もとの距離 AB は、原点から $\beta - \alpha$ までの距離に等しい。したがって、

$$AB = |\,\beta - \alpha\,|$$

である。2 点間の距離を求めるときは、一方を原点へ移すために「終点から始点を引く」と考えるとよい。

複素数平面上の 2 点間の距離

複素数 α、β に対応する 2 点間の距離は

$$|\,\beta - \alpha\,|$$

である。座標で書けば、

$$|\,\beta - \alpha\,| = \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2}$$

である。

例題 1：2 点間の距離を求める

$\alpha = 1 + 2i$、$\beta = 4 + 6i$ に対応する 2 点 A、B の距離を求めよ。

例題 1 の解答・解説

A から B への移動は

$$\beta - \alpha = (4 + 6i) - (1 + 2i) = 3 + 4i$$

である。したがって、

$$AB = |\,3 + 4i\,| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

である。実軸方向に 3、虚軸方向に 4 だけ進む移動の長さが 5 である。

©ミライコーチング

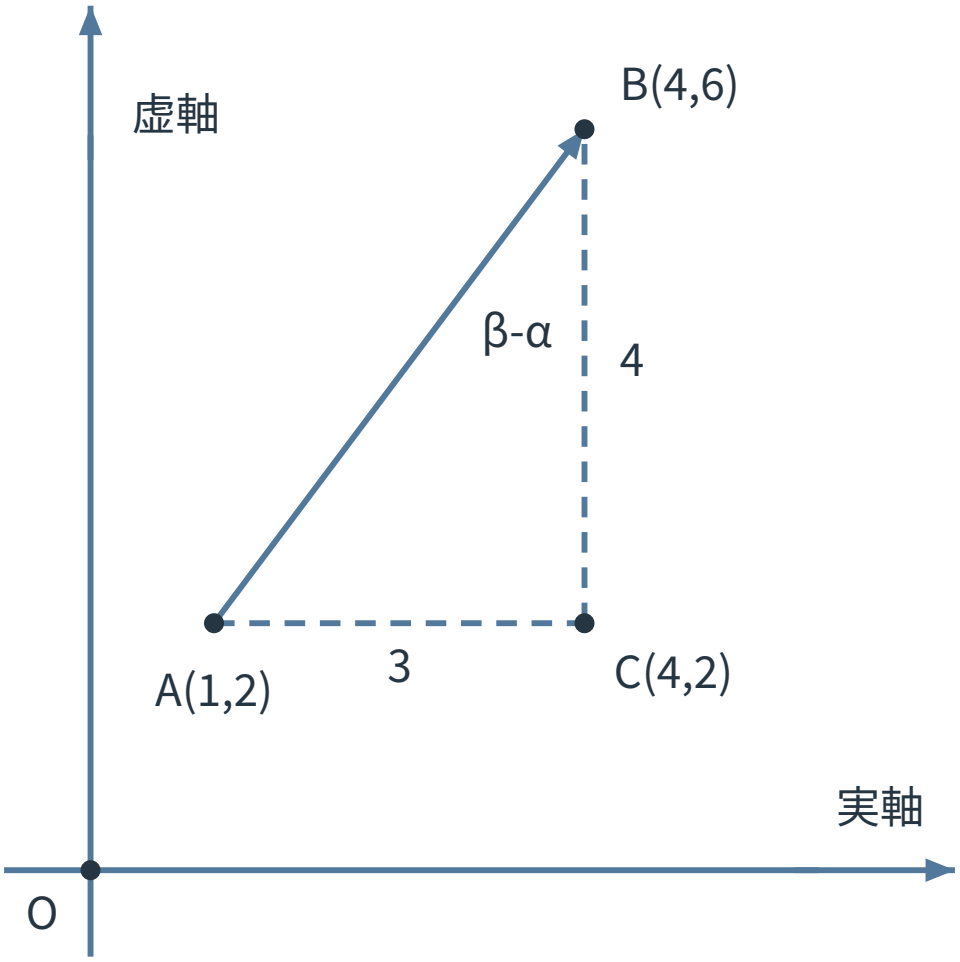

図 1　A から B への移動は $\beta-\alpha=3+4i$ である

差そのものと距離を区別する

$\beta-\alpha=3+4i$ は向きと移動量をもつ複素数である。一方、距離は $|\beta-\alpha|=5$ という非負の実数である。距離を尋ねられたら、差を求めるだけで終わらず、その絶対値を取る。
また、距離は $|\beta|-|\alpha|$ ではない。たとえば $\alpha=1$、$\beta=i$ では $|\beta|-|\alpha|=0$ だが、2 点間の距離は $|i-1|=\sqrt{2}$ である。まず複素数を引き、その後で絶対値を取る。

2. 平行移動で公式の意味を確かめる

同じ差をもつ線分は同じ長さである

A と B をともに同じ複素数 γ だけ平行移動すると、移動後の点は $\alpha+\gamma$、$\beta+\gamma$ に対応する。移動後の差は

$$(\beta+\gamma)-(\alpha+\gamma)=\beta-\alpha$$

であり、平行移動の成分 γ は消える。したがって、位置が変わっても 2 点の差と距離は変わらない。特に $\gamma = -\alpha$ とすれば、始点を原点へ移せる。

例題 2：平行移動して距離を見る

$\alpha = -2 + i$、$\beta = 1 + 3i$ とする。
(1) A、B をともに $2 - i$ だけ平行移動した後の複素数を求めよ。
(2) 移動前後の 2 点間の距離が等しいことを、差を用いて確かめよ。

例題 2 の解答・解説

(1) $2 - i = -\alpha$ なので、A の移動後は

$$\alpha + (2 - i) = 0$$

であり、B の移動後は

$$\beta + (2 - i) = (1 + 3i) + (2 - i) = 3 + 2i$$

である。
(2) 移動前の差は

$$\beta - \alpha = (1 + 3i) - (-2 + i) = 3 + 2i$$

である。移動後の差も $(3 + 2i) - 0 = 3 + 2i$ である。したがって、移動前後の距離はいずれも

$$| 3 + 2i | = \sqrt{13}$$

である。

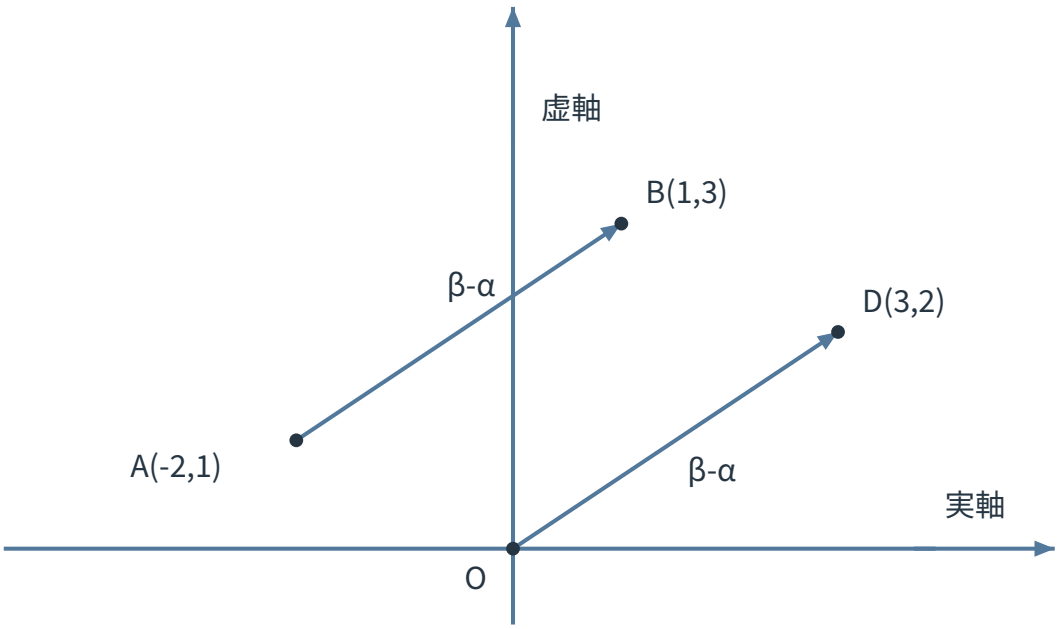

図 2　$-\alpha$ の平行移動で線分 AB を原点から始める

3. 順序と特別な場合を整理する

向きが逆でも距離は同じ

A から B への移動は $\beta-\alpha$、B から A への移動は $\alpha-\beta=-(\beta-\alpha)$ である。向きは反対になるが、$|-z|=|z|$ なので、

$$|\alpha-\beta|=|\beta-\alpha|$$

である。距離だけを求めるなら、差を取る順序はどちらでもよい。

2 点が一致するときも公式は使える

$\alpha=\beta$ のとき、差は 0 なので距離は $|\beta-\alpha|=0$ である。逆に、距離が 0 なら $\beta-\alpha=0$ であり、2 点は一致する。公式は異なる 2 点だけに限られない。

例題 3：距離から未知数を求める

x を実数とする。$\alpha=1+2i$、$\beta=x+6i$ に対応する 2 点間の距離が 5 であるとき、x を求めよ。

例題 3 の解答・解説

$$\beta-\alpha=(x-1)+4i$$

なので、距離の条件は

$$\sqrt{(x-1)^2+4^2}=5$$

である。両辺は非負なので 2 乗して、

$$(x-1)^2+16=25$$

を得る。よって $(x-1)^2=9$ であり、

$$x=4,\ -2$$

である。横方向の差が 3 または -3 となるため、2 つの位置がある。

4. 演習問題

演習 1：距離の基本計算

次の α、β に対応する 2 点間の距離を求めよ。
(1) $\alpha=2-i$、$\beta=5+3i$
(2) $\alpha=-3+2i$、$\beta=1-4i$
(3) $\alpha=4i$、$\beta=-3$

演習 2：軸上の 2 点

$\alpha=-5$、$\beta=2i$ に対応する 2 点間の距離を求めよ。また、実軸方向と虚軸方向の差を答えよ。

©ミライコーチング

演習 3：差の順序

$\alpha = -1 + 4i$、$\beta = 3 + i$ とする。$\beta - \alpha$ と $\alpha - \beta$ をそれぞれ求め、両者の絶対値が等しいことを確かめよ。

演習 4：未知数を求める

x を実数とする。$\alpha = x + i$、$\beta = 2 + 5i$ に対応する 2 点間の距離が 4 であるとき、x を求めよ。

演習 5：距離から点を判定する

点 A は複素数 $1 - 2i$、点 B は複素数 $4 + 2i$ に対応する。次の点のうち、A からの距離が AB と等しいものをすべて選べ。

- ア：$-2 + 2i$ に対応する点
- イ：$4 - 6i$ に対応する点
- ウ：$-3 + i$ に対応する点
- エ：$5 - 2i$ に対応する点

演習 6：等距離になる実数

t を実数とする。$t + i$ に対応する点が、$-1 + 2i$ と $3 + 4i$ に対応する 2 点から等しい距離にあるとき、t を求めよ。

5. 演習の解答・解説

演習 1 の解答・解説

(1) $\beta - \alpha = (5 + 3i) - (2 - i) = 3 + 4i$ なので、距離は $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ である。
(2) $\beta - \alpha = (1 - 4i) - (-3 + 2i) = 4 - 6i$ なので、距離は $\sqrt{4^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{13}$ である。
(3) $\beta - \alpha = -3 - 4i$ なので、距離は $\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$ である。

演習 2 の解答・解説

$$\beta - \alpha = 2i - (-5) = 5 + 2i$$

である。実軸方向の差は 5、虚軸方向の差は 2 なので、距離は

$$| 5 + 2i | = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

である。

演習 3 の解答・解説

$$\beta - \alpha = (3+i) - (-1+4i) = 4 - 3i$$

であり、

$$\alpha - \beta = -4 + 3i = -(4 - 3i)$$

である。したがって、

$$|\,\beta - \alpha\,| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5, \qquad |\,\alpha - \beta\,| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$$

であり、両者の絶対値は等しい。

演習 4 の解答・解説

$$\beta - \alpha = (2 - x) + 4i$$

なので、距離の条件は

$$\sqrt{(2-x)^2 + 16} = 4$$

である。両辺を 2 乗すると $(2-x)^2 + 16 = 16$ なので、$(2-x)^2 = 0$ である。したがって、$x = 2$ である。このとき 2 点は縦方向に 4 だけ離れている。

演習 5 の解答・解説

まず、

$$AB = |\,(4+2i) - (1-2i)\,| = |\,3 + 4i\,| = 5$$

である。

- ア：$|\,(-2+2i) - (1-2i)\,| = |\,-3+4i\,| = 5$ なので条件を満たす。
- イ：$|\,(4-6i) - (1-2i)\,| = |\,3-4i\,| = 5$ なので条件を満たす。
- ウ：$|\,(-3+i) - (1-2i)\,| = |\,-4+3i\,| = 5$ なので条件を満たす。
- エ：$|\,(5-2i) - (1-2i)\,| = |\,4\,| = 4$ なので条件を満たさない。

したがって、ア、イ、ウである。各選択肢では、A からの差の実部と虚部の組がそれぞれ $(-3, 4)$、$(3, -4)$、$(-4, 3)$、$(4, 0)$ となる。初めの 3 組だけが、実部の 2 乗と虚部の 2 乗の和が 25 である。

演習 6 の解答・解説

$t + i$ と $-1 + 2i$ の距離の 2 乗は

$$(t+1)^2 + (1-2)^2 = (t+1)^2 + 1$$

である。また、$t + i$ と $3 + 4i$ の距離の 2 乗は

$$(t-3)^2 + (1-4)^2 = (t-3)^2 + 9$$

である。距離はともに非負なので、距離が等しいことは距離の 2 乗が等しいことと同値である。よって、

$$(t+1)^2 + 1 = (t-3)^2 + 9$$

である。展開して整理すると $8t = 16$ なので、$t = 2$ である。実際、両方の距離の 2 乗は 10 となる。

©ミライコーチング