

第 70 講 素数と素因数分解

学習目標

- ・ 素数と合成数の意味を、正の約数の個数に注目して説明できる。
- ・ 1 が素数でも合成数でもないことを説明できる。
- ・ 正の整数を素数の積に分解する素因数分解の意味を理解できる。
- ・ 小さい素数で順に割る方法を使って素因数分解できる。
- ・ 同じ素因数が繰り返し現れるとき、指数を使って簡潔に表せる。

正の約数の個数に注目する

約数の数で整数を分ける

正の整数の正の約数を調べると、整数によって個数に違いがある。
たとえば、7 の正の約数は、

$$1, 7$$

の 2 個だけである。
一方、12 の正の約数は、

$$1, 2, 3, 4, 6, 12$$

の 6 個である。
この違いを利用して、正の整数を素数と合成数に分ける。

素数

素数

1 より大きい正の整数で、正の約数が 1 とその数自身の 2 個だけである数を**素数**という。

素数の例

たとえば 2 の正の約数は、

$$1, 2$$

だけなので、2 は素数である。
5 の正の約数は、

$$1, 5$$

だけなので、5 も素数である。
同様に、

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots$$

は素数である。

2 は最小の素数

2 の正の約数は 1 と 2 の 2 個だけなので、2 は素数である。
また、2 は唯一の偶数の素数である。
2 より大きい偶数はすべて 2 で割り切れるため、正の約数を 3 個以上もつからである。

合成数

合成数

1 より大きい正の整数で、素数ではない数を**合成数**という。
言い換えると、1 とその数自身以外にも正の約数をもつ数である。

合成数の例

6 の正の約数は、

$$1, 2, 3, 6$$

である。

1 と 6 以外にも 2 と 3 を約数にもつため、6 は合成数である。

また、

$$6 = 2 \cdot 3$$

のように、1 より大きく 6 より小さい正の整数の積として表せることから、6 が合成数であると分かる。

素数か合成数か

1 より大きい正の整数について、

- ・ 正の約数が 2 個だけなら素数
- ・ 正の約数が 3 個以上あれば合成数

と判断できる。

1 は素数でも合成数でもない

1 の正の約数は 1 個だけ

1 の正の約数は、

$$1$$

だけである。

素数は正の約数をちょうど 2 個もつ必要があるので、1 は素数ではない。

また、合成数は 1 より大きい正の整数について考えるので、1 は合成数でもない。

1 の扱い

1 は素数でも合成数でもない。

1 を素数に含めない

素数を列挙するとき、1 を含めてはいけない。

素数は必ず 1 より大きい正の整数である。

0 や負の整数の扱い

この講での素数・合成数の範囲

この講では、素数と合成数を正の整数について考える。

したがって、

- 0
- 負の整数
- 1

は素数でも合成数でもないものとして扱う。

素因数とは何か

素因数

ある正の整数の約数であり、さらに素数である数を、その整数の**素因数**という。

12 の素因数

12 の正の約数は、

$$1, 2, 3, 4, 6, 12$$

である。

このうち素数であるものは、

$$2, 3$$

である。

したがって、12 の素因数は 2 と 3 である。

素因数とすべての約数は違う

4 は 12 の約数であるが、4 は合成数なので素因数ではない。

素因数になるには、

1. その数の約数である。
2. 素数である。

という 2 つの条件を満たす必要がある。

素因数分解

素因数分解

1 より大きい正の整数を、素数だけの積で表すことを**素因数分解**という。

12 を素数の積に分ける

12 は、

$$12 = 2 \cdot 6$$

と表せる。

さらに 6 は、

$$6 = 2 \cdot 3$$

と表せる。

したがって、

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

となる。

2 と 3 はどちらも素数なので、これで素因数分解が完了したことになる。

最後はすべて素数にする

素因数分解では、積に現れる数がすべて素数になるまで分解する。
たとえば、

$$24 = 4 \cdot 6$$

だけでは、4 と 6 がどちらも合成数なので素因数分解ではない。
さらに分解して、

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

とする必要がある。

割り算を使って素因数分解する

小さい素数から順に割る

60 を素因数分解する。
まず、60 は 2 で割り切れるので、

$$60 = 2 \cdot 30$$

とする。

30 も 2 で割り切れるので、

$$30 = 2 \cdot 15$$

とする。

15 は 2 では割り切れないが、3 で割り切れるので、

$$15 = 3 \cdot 5$$

とする。

5 は素数なので、ここで終わる。

したがって、

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

である。

割り算による基本手順

正の整数を素因数分解するときは、次の順に進めるとよい。

1. まず 2 で割り切れるか調べる。
2. 割り切れる間は同じ素数で繰り返し割る。
3. 割れなくなったら、3、5、7 など次の小さい素数を調べる。
4. 最後に残った数が素数になったら終了する。

合成数で割る必要はない

素因数分解では、素数を使って分解すればよい。

4 や 6 のような合成数で割ることも計算上は可能であるが、最後にさらに素数へ分解する必要がある。

入門では、小さい素数から順に割る方法を基本とする。

指数を使って表す

同じ素因数をまとめる

72 を素因数分解すると、

$$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

となる。

同じ数の積は指数を使って表せるので、

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$$

$$3 \cdot 3 = 3^2$$

である。

したがって、

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

と簡潔に表せる。

指数は同じ素因数の個数を表す

素因数分解で、

$$2^4 \cdot 3$$

と書かれていれば、2 が 4 個、3 が 1 個掛けられているという意味である。

つまり、

$$2^4 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

である。

素因数分解できたか確認する

元の数に戻るか確かめる

90 を、

$$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

と素因数分解したとする。

右辺を計算すると、

$$2 \cdot 9 \cdot 5 = 90$$

となる。

また、2、3、5 はすべて素数である。

したがって、正しく素因数分解できていると確認できる。

確認する 2 点

素因数分解のあとには、

1. 積に現れる数がすべて素数であるか。
2. 掛け戻すと元の数になるか。

を確認するとよい。

例題

例題 1

次の数を、素数・合成数・どちらでもないものに分類せよ。

1, 2, 9, 13, 21

例題 1 の解答・解説

1 は素数でも合成数でもない。

2 の正の約数は 1 と 2 だけなので、2 は素数である。

9 は、

$$9 = 3 \cdot 3$$

と表せるので合成数である。

13 の正の約数は 1 と 13 だけなので、13 は素数である。

21 は、

$$21 = 3 \cdot 7$$

と表せるので合成数である。

したがって、

- 素数：2, 13
- 合成数：9, 21
- どちらでもない：1

である。

例題 2

84 を素因数分解せよ。

例題 2 の解答・解説

84 は 2 で割り切れるので、

$$84 = 2 \cdot 42$$

である。

42 も 2 で割り切れるので、

$$42 = 2 \cdot 21$$

である。

21 は 3 で割り切れるので、

$$21 = 3 \cdot 7$$

である。

7 は素数なので、ここで終了する。

したがって、

$$84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$$

であり、指数を使うと、

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

である。

例題 3

次の式を通常の整数に戻せ。

$$2^3 \cdot 3^2$$

また、この式に現れる素因数をすべて答えよ。

例題 3 の解答・解説

$$2^3 = 8$$

$$3^2 = 9$$

なので、

$$2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$$

である。

この素因数分解に現れる素数は 2 と 3 なので、素因数は、

$$2, 3$$

である。

演習問題

練習問題 1

次の数のうち、素数をすべて選べ。

$$1, 2, 4, 7, 11, 15$$

練習問題 2

次の数を、素数・合成数・どちらでもないものに分類せよ。

0, 1, 3, 10, 17, 25

練習問題 3

36 を素因数分解し、指数を使って表せ。

練習問題 4

54 を素因数分解し、指数を使って表せ。

練習問題 5

100 を素因数分解し、指数を使って表せ。

練習問題 6

次の素因数分解から元の整数を求めよ。

$$2^4 \cdot 5$$

練習問題 7

126 を素因数分解せよ。

また、126 の素因数をすべて答えよ。

練習問題 8

ある生徒は、

$$48 = 6 \cdot 8$$

と書き、「これで 48 の素因数分解は完了した」と判断した。

この判断の誤りを説明し、48 を正しく素因数分解せよ。

練習問題 9

ある生徒は「1 は 1 と自分自身でしか割り切れないので素数である」と述べた。

この説明の誤りを、素数の定義を用いて説明せよ。

演習問題の解答・解説

練習問題 1 の解答・解説

1 は素数ではない。

2 の正の約数は 1 と 2 だけなので素数である。

4 は、

$$4 = 2 \cdot 2$$

と表せるので合成数である。

7 と 11 は、それぞれ正の約数が 1 と自分自身の 2 個だけなので素数である。

15 は、

$$15 = 3 \cdot 5$$

と表せるので合成数である。

したがって、素数は、

$$2, 7, 11$$

である。

練習問題 2 の解答・解説

0 と 1 は素数でも合成数でもない。

3 は正の約数が 1 と 3 だけなので素数である。

10 は、

$$10 = 2 \cdot 5$$

と表せるので合成数である。

17 は正の約数が 1 と 17 だけなので素数である。

25 は、

$$25 = 5 \cdot 5$$

と表せるので合成数である。

したがって、

- 素数：3, 17
- 合成数：10, 25
- どちらでもない：0, 1

である。

練習問題 3 の解答・解説

36 を小さい素数から順に分解すると、

$$36 = 2 \cdot 18$$

$$18 = 2 \cdot 9$$

$$9 = 3 \cdot 3$$

である。
したがって、

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

なので、

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

である。

練習問題 4 の解答・解説

54 は 2 で割り切れるので、

$$54 = 2 \cdot 27$$

である。
27 は、

$$27 = 3 \cdot 9$$

$$9 = 3 \cdot 3$$

と分解できる。
したがって、

$$54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

なので、

$$54 = 2 \cdot 3^3$$

である。

練習問題 5 の解答・解説

100 は、

$$100 = 2 \cdot 50$$

$$50 = 2 \cdot 25$$

$$25 = 5 \cdot 5$$

と分解できる。
したがって、

$$100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$$

なので、

$$100 = 2^2 \cdot 5^2$$

である。

練習問題 6 の解答・解説

$$2^4 = 16$$

なので、

$$2^4 \cdot 5 = 16 \cdot 5 = 80$$

である。

したがって、元の整数は 80 である。

練習問題 7 の解答・解説

126 は 2 で割り切れるので、

$$126 = 2 \cdot 63$$

である。

63 は 3 で割り切れるので、

$$63 = 3 \cdot 21$$

である。

さらに、

$$21 = 3 \cdot 7$$

である。

したがって、

$$126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$$

なので、

$$126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

である。

よって、126 の素因数は、

$$2, 3, 7$$

である。

練習問題 8 の解答・解説

6 と 8 はどちらも合成数なので、

$$48 = 6 \cdot 8$$

は素数だけの積になっていない。

したがって、まだ素因数分解は完了していない。

6 と 8 をさらに分解すると、

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

である。

よって、

$$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

なので、

$$48 = 2^4 \cdot 3$$

である。

練習問題 9 の解答・解説

素数は、1 より大きい正の整数で、正の約数がちょうど 2 個ある数である。

1 の正の約数は、

1

の 1 個だけである。

したがって、1 は素数の定義を満たさない。

また、1 は合成数でもない。