第 199 講 関数のグラフ

学習目標

この講では、関数の式からグラフの概形を判断する方法を身につける。
具体的には、次のことができることを目標とする。
- 定義域を確認し、グラフが存在する範囲を判断できる
- 対称性や軸との交点を調べ、全体の形を予想できる
- 端や無限遠での関数の様子を考えられる
- 導関数を用いて増減と極値を調べられる
- 第 2 次導関数を用いて凹凸と変曲点を判断できる
- 複数の情報を組み合わせて関数の概形を描ける

グラフを描く前に見るべきもの

関数のグラフは、いきなり点をいくつも計算して描くものではない。
重要なのは、グラフ全体を決める情報を順番に集めることである。
例えば、3 次関数では増加している区間だけを調べても、山や谷の位置は分かるが、曲がり方までは決まらない。
同じように増減が分かっていても、凹凸や変曲点が異なる関数は存在する。
したがって、次のような複数の視点を組み合わせる必要がある。
1. 定義域を確認する
2. 対称性を調べる
3. 軸との交点を求める
4. $x \to \pm\infty$ の様子を調べる
5. 増減と極値を調べる
6. 凹凸と変曲点を調べる

これらの情報を組み合わせることで、関数の特徴をとらえたグラフの概形を判断できる。

関数のグラフを決める情報

関数 $y = f(x)$ について、グラフの概形を調べるときは次の情報を確認する。
- 定義域：どのxで関数が定義されるか
- 対称性：偶関数・奇関数などの特徴
- 軸との交点：x軸、y軸との交点
- 無限遠での様子：xが大きくなったときの$f(x)$の変化
- 増減：$f'(x)$の符号による変化
- 凹凸：$f''(x)$の符号による曲がり方

©ミライコーチング

グラフを描く手順

関数のグラフを描くときは、次の順番で情報を整理する。

1. 定義域を確認する。
2. 対称性を確認する。
3. x軸やy軸との交点を求める。
4. 多項式の場合は最高次の項から無限遠での様子を判断する。分数関数などでは除外点や有限端での片側極限、漸近線も確認する。
5. $f'(x)$を用いて、導関数が 0 になる点や増減を調べる。
6. $f''(x)$を用いて凹凸と変曲点を調べる。
7. 得られた定性的な情報を組み合わせ、グラフの概形を描く。

ただし、これらの情報はグラフの特徴を判断するためのものであり、関数全体を完全に一意に決めるとは限らない。必要な情報を追加しながら概形を精密にしていくことが重要である。

増減だけではグラフは決まらない

増減表はグラフの上がり下がりを示すが、曲線の曲がり方までは示さない。
例えば、ある区間で常に増加する関数でも、途中で上に凸から下に凸へ変化する場合がある。
増減だけで満足せず、必要に応じて第 2 次導関数まで確認することが大切である。

水平接線と極値を区別する

導関数が 0 になる点は、グラフの接線が水平になる点である。しかし、そのすべてが極値になるとは限らない。
例えば、$f(x) = x^3$では$f'(0) = 0$であり、原点で水平接線をもつ。しかし、$x < 0$でも$x > 0$でも関数は増加しているため、原点は極値ではない。
また、$f''(x) = 6x$より、$x = 0$で凹凸が変化するため、原点は変曲点である。このように、水平接線、極値、変曲点は別々に確認する必要がある。

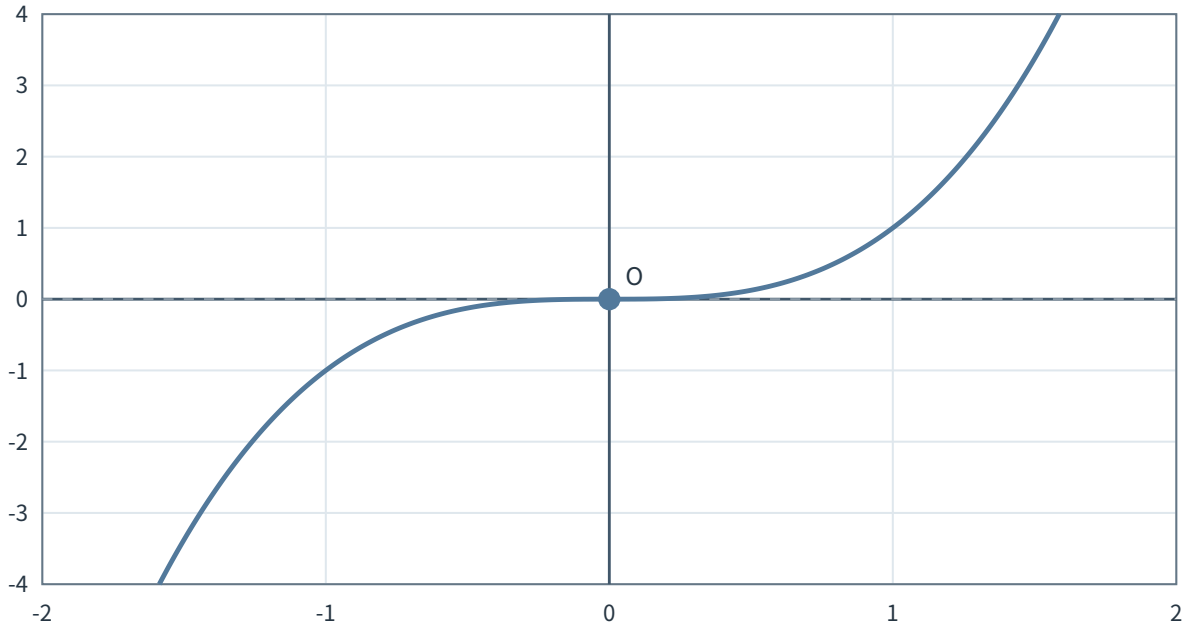

図 1　水平接線をもつが極値ではない 3 次関数

例題 1：対称性と増減から 3 次関数の概形を描く

関数 $f(x) = x^3 - 3x$ のグラフの概形を描くために、次を調べなさい。
(1) 対称性を調べなさい。
(2) 増減と極値を調べなさい。
(3) 凹凸と変曲点を調べ、グラフの概形を描きなさい。

例題 1：対称性と増減から 3 次関数の概形を描く解答・解説

関数 $f(x) = x^3 - 3x$ の定義域はすべての実数である。
対称性について、$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -(x^3 - 3x)$ であるため、$f(-x) = -f(x)$ となり、原点対称である。
軸との交点を調べる。x軸との交点は $x^3 - 3x = x(x^2 - 3) = 0$ より、$x = -\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$ である。したがって交点は $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$、$(0, 0)$、$\left(\sqrt{3}, 0\right)$ である。y軸との交点は $(0, 0)$ である。
導関数は $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$ である。
したがって、$x = -1, 1$で導関数が 0 になる点を調べる。$f'(x)$の符号より、$x < -1$では増加、$-1 < x < 1$では減少、$x > 1$では増加する。
よって、$x = -1$で極大、$x = 1$で極小となり、値はそれぞれ $f(-1) = 2$、$f(1) = -2$ である。
2 次導関数は $f''(x) = 6x$ である。$x < 0$では$f''(x) < 0$なので上に凸、$x > 0$では$f''(x) > 0$なので下に凸となる。$x = 0$で凹凸が変化するため、変曲点は$(0, 0)$である。
また、最高次の項がx^3であるため、$x \to \infty$では$f(x) \to \infty$、$x \to -\infty$では$f(x) \to -\infty$となる。
以上の情報から、両端へ伸びながら、極大点$(-1, 2)$、変曲点$(0, 0)$、極小点$(1, -2)$を通る 3 次関数の概形が決まる。

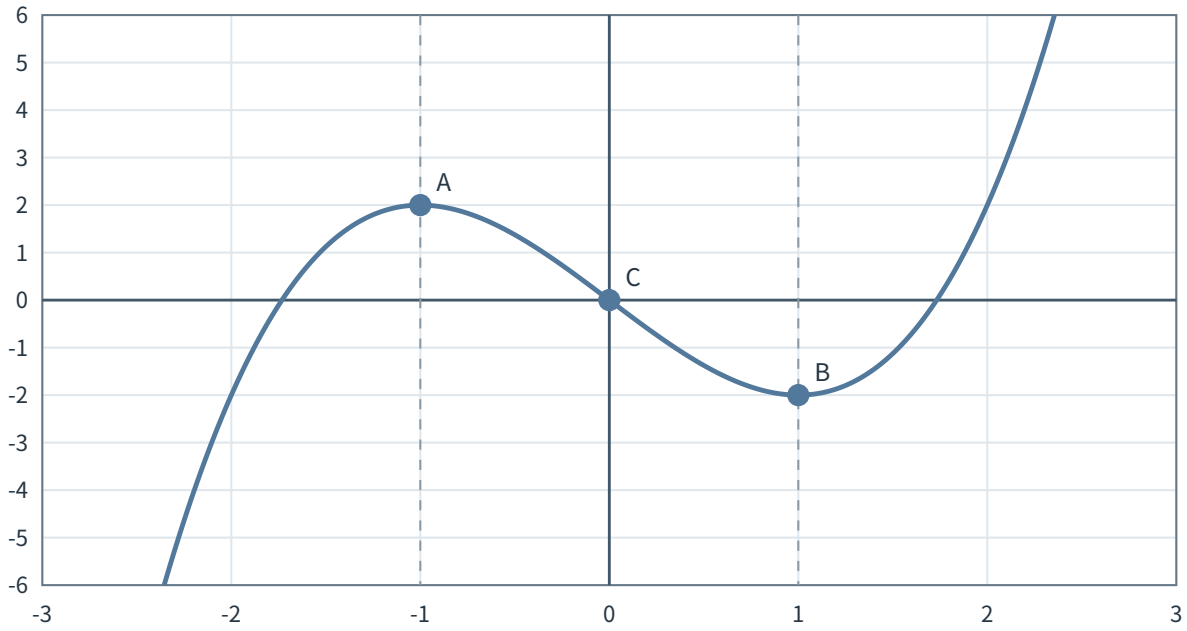

図 2　3 次関数の増減と極値を確認するグラフ

例題 2：水平接線と極値を区別する

関数 $f(x) = x^4 - 2x^2$ のグラフの概形を描くために、次を調べなさい。
(1) 対称性を調べなさい。
(2) $f'(x) = 0$となる点を求め、極値を調べなさい。
(3) 水平接線をもつ点と極値をもつ点の関係を説明しなさい。

例題 2：水平接線と極値を区別する解答・解説

関数 $f(x) = x^4 - 2x^2$ の定義域はすべての実数である。
対称性について、$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = f(x)$ であるため、y軸対称である。
軸との交点を求めると、 $x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2) = 0$ より、$x = -\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}$ である。したがってx軸との交点は $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$、$(0, 0)$、$\left(\sqrt{2}, 0\right)$ である。
導関数は $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$ である。
導関数が 0 になる点は$x = -1, 0, 1$である。符号を調べると、増減は次の 4 区間で変化する。
- $x < -1$では減少
- $-1 < x < 0$では増加
- $0 < x < 1$では減少
- $x > 1$では増加

したがって、$x = -1, 1$で極小、$x = 0$で極大となる。値は$f(-1) = -1$、$f(0) = 0$、$f(1) = -1$である。
2 次導関数は $f''(x) = 12x^2 - 4$ である。
$f''(x) = 0$より、変曲点候補のx座標を調べると次のようになる。

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

次の 2 区間では第 2 次導関数が正なので下に凸である。

$$x < -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x > \frac{1}{\sqrt{3}}$$

次の区間では第 2 次導関数が負なので上に凸である。

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

関数値を計算すると次の値を得る。

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{5}{9}$$

したがって、変曲点の座標は次のとおりである。

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{9}\right)$$

また、$x \to \pm\infty$では最高次の項x^4が支配的になるため、両端はともに上へ向かい、$f(x) \to \infty$となる。
水平接線をもつことは導関数が 0 になることを意味するが、必ず極値になるわけではない。例えば$f(x) = x^3$は$x = 0$で水平接線をもつが、増加し続けるため極値ではない。

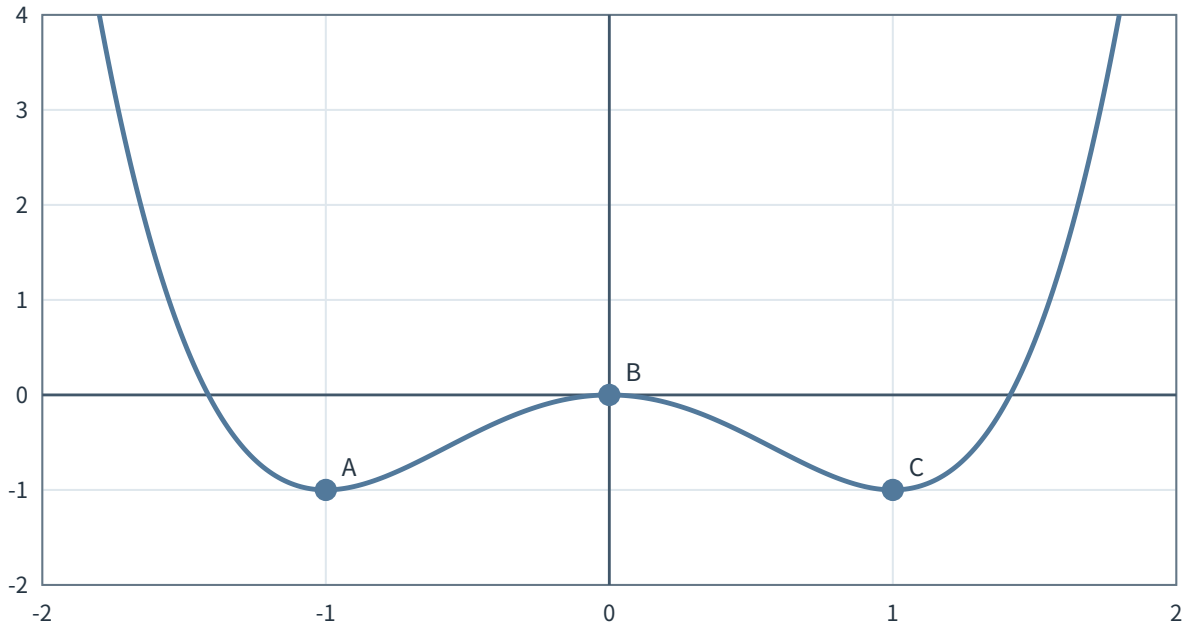

図 3　4 次関数の極値を確認するグラフ

例題 3：凹凸と変曲点を利用したグラフ

関数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ のグラフの概形を描くために、次を調べなさい。
(1) 極値を求めなさい。
(2) 凹凸と変曲点を求めなさい。
(3) 極値と変曲点の情報を利用して概形を描きなさい。

例題 3：凹凸と変曲点を利用したグラフ解答・解説

関数 $f(x) = x(x-3)^2$ の定義域はすべての実数である。
展開すると、$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ である。
x軸との交点は $x(x-3)^2 = 0$ より、$(0,0)$、$(3,0)$である。y軸との交点は$(0,0)$である。
また、最高次の項がx^3であるため、$x \to \infty$では$f(x) \to \infty$、$x \to -\infty$では$f(x) \to -\infty$となる。
導関数は $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$ である。
導関数が 0 になる点は$x = 1, 3$である。符号を調べると、

- $x < 1$では増加
- $1 < x < 3$では減少
- $x > 3$では増加

となる。
したがって、$(1,4)$で極大、$(3,0)$で極小となる。
2 次導関数は $f''(x) = 6x - 12$ である。
$f''(x) = 0$より$x = 2$である。$x < 2$では$f''(x) < 0$なので上に凸、$x > 2$では$f''(x) > 0$なので下に凸となる。
よって、凹凸が変化する変曲点は$(2,2)$である。
極大点、極小点、変曲点、両端の様子を組み合わせることで、この 3 次関数の概形を判断できる。

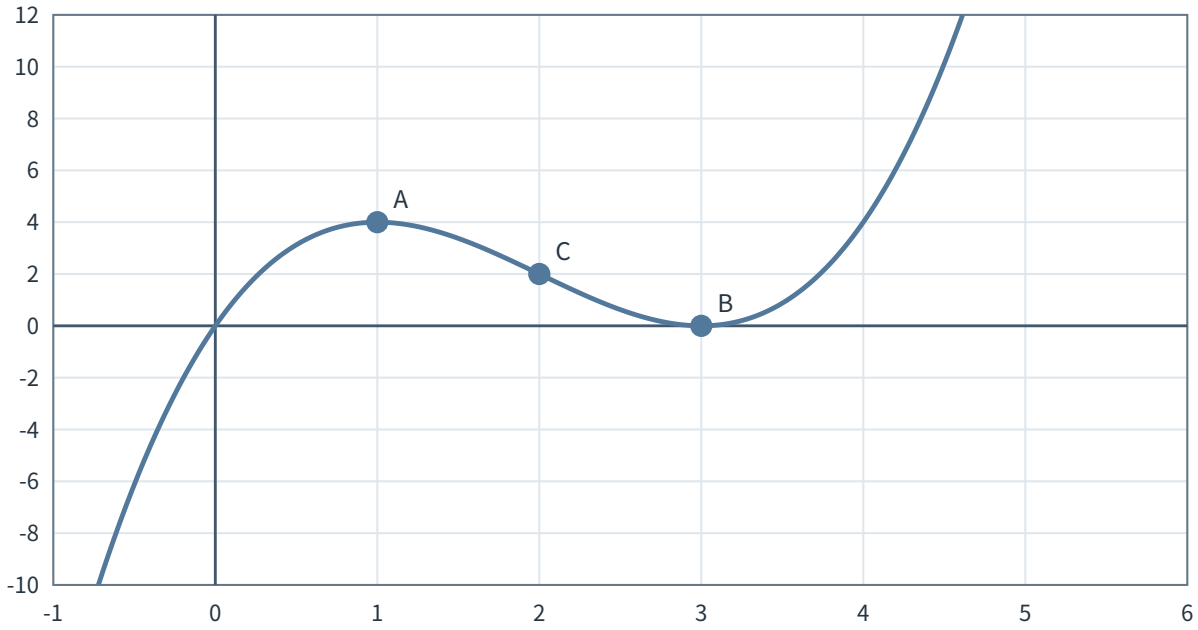

図 4　極値と変曲点を確認する 3 次関数のグラフ

演習問題

練習問題 1 3 次関数の概形判断

関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ のグラフの概形を描くために、次を調べなさい。
(1) 定義域、x軸との交点の個数と位置、y軸との交点、$x \to \pm\infty$での様子を確認しなさい。ただし、x軸との交点については 3 次方程式の厳密な根を求めることを目的とせず、整数間での位置と個数を調べればよい。
(2) 増減と極値を調べなさい。
(3) 凹凸と変曲点を調べ、得られた情報からグラフの概形を説明しなさい。

練習問題 2 対称性を利用した 4 次関数の概形

関数 $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$ のグラフについて、次を調べなさい。
(1) 対称性と軸との交点を求めなさい。
(2) 増減と極値を調べなさい。
(3) 凹凸と変曲点を調べ、グラフの特徴を説明しなさい。

練習問題 3 重解をもつ 3 次関数のグラフ

関数 $f(x) = x(x-2)^2$ のグラフの概形を描きなさい。
定義域、交点、無限遠での様子、増減、凹凸、変曲点を調べ、特に$x = 2$でのグラフの特徴を説明しなさい。

©ミライコーチング

練習問題 4 分数関数の漸近線と概形

次の関数について、グラフの概形を判断しなさい。

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

(1) 定義域を求めなさい。
(2) 垂直漸近線と水平漸近線を求めなさい。
(3) 増減を調べ、無限遠や除外点付近での様子を説明しなさい。

練習問題 5 分数関数の端の様子

次の関数について、グラフの概形を判断しなさい。

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x}$$

(1) 定義域と交点を求めなさい。
(2) 無限遠での様子を調べなさい。
(3) 増減と極値を調べ、グラフの特徴を説明しなさい。

練習問題 6 指数関数の無限遠での変化

関数 $f(x) = e^x - 2x$ について、グラフの概形を判断しなさい。
ただし、eは自然対数の底である。
(1) 定義域と端の様子を調べなさい。
(2) 増減と極値を調べなさい。
(3) グラフの形を説明しなさい。

練習問題 7 自然対数を含む関数の概形

関数 $f(x) = \log_e x - x$ について、グラフの概形を判断しなさい。
(1) 定義域を確認しなさい。
(2) 増減と極値を調べなさい。
(3) $x \to 0+$、$x \to \infty$での様子を説明しなさい。

練習問題 8 複数の情報を組み合わせた概形判断

関数 $f(x) = x^4 - 2x^3$ について、グラフの概形を判断しなさい。
(1) 定義域、交点、両端の様子を調べなさい。
(2) 増減と極値を調べなさい。
(3) 凹凸と変曲点を調べ、グラフ全体の特徴を説明しなさい。

練習問題 1 3 次関数の概形判断の解答・解説

関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ の定義域はすべての実数である。

x軸との交点は方程式 $f(x)=0$ の解で決まる。ただし、この 3 次方程式の厳密な根を求める必要はない。
交点の位置を絞るため、次の値を調べる。

$$f(-3)=-22,\ f(-2)=3$$
$$f(0)=5,\qquad f(1)=-6$$
$$f(4)=-15,\quad f(5)=10$$

これらの値と増減を組み合わせることで、符号が変化する区間ごとにx軸との交点の個数と位置を判断できる。
関数は連続であり、各区間では後で調べる増減により単調であるため、符号が変化する各区間にx軸との交点が 1 個ずつ存在する。
したがって、x軸との交点は 3 個であり、それぞれ$(-3,-2)$、$(0,1)$、$(4,5)$の範囲に 1 個ずつ存在する。
y軸との交点は$f(0)=5$より$(0,5)$である。
最高次の項がx^3であるため、$x\to\infty$では$f(x)\to\infty$、$x\to-\infty$では$f(x)\to-\infty$となる。
導関数は $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$ である。
導関数が 0 になる点は$x=-1,3$である。
符号を調べると、
- $x<-1$では増加
- $-1<x<3$では減少
- $x>3$では増加

となる。
したがって、$x=-1$で極大、$x=3$で極小となる。
値は$f(-1)=10$、$f(3)=-22$であるため、極大点は$(-1,10)$、極小点は$(3,-22)$である。
2 次導関数は $f''(x)=6x-6$ である。
$f''(x)=0$より$x=1$であり、$x<1$では$f''(x)<0$なので上に凸、$x>1$では$f''(x)>0$なので下に凸となる。
したがって変曲点は$f(1)=-6$より$(1,-6)$である。
以上より、左下から上昇して極大$(-1,10)$を通り、変曲点$(1,-6)$を経て下降し、極小$(3,-22)$の後に再び上昇する 3 次関数の概形となる。

練習問題 2 対称性を利用した 4 次関数の概形解答・解説

関数 $f(x)=x^4-4x^2+3$ の定義域はすべての実数である。
$f(-x)=f(x)$より、y軸対称である。
x軸との交点は $x^4-4x^2+3=(x^2-1)(x^2-3)=0$ より、$x=\pm1,\pm\sqrt{3}$である。
y軸との交点は$f(0)=3$より$(0,3)$である。
また、最高次の項がx^4であるため、$x\to\pm\infty$では$f(x)\to\infty$となる。
導関数は $f'(x)=4x(x^2-2)$ である。導関数が 0 になる点は$x=-\sqrt{2},0,\sqrt{2}$であるため、増減を 4 区間に分けて調べると、$x<-\sqrt{2}$では減少、$-\sqrt{2}<x<0$では増加、$0<x<\sqrt{2}$では減少、$x>\sqrt{2}$では増加となる。したがって、$x=0$では極大、$x=\pm\sqrt{2}$では極小となる。
値は$f(0)=3$、$f\left(\pm\sqrt{2}\right)=-1$である。
したがって、極大点は$(0,3)$、極小点は$\left(\pm\sqrt{2},-1\right)$である。
2 次導関数は $f''(x)=12x^2-8$ である。
第 2 次導関数が 0 になるx座標は次のとおりである。

$$x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

凹凸を調べると、次の区間では第 2 次導関数が正なので下に凸である。

$$x < -\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad x > \sqrt{\frac{2}{3}}$$

次の区間では第 2 次導関数が負なので上に凸である。

$$-\sqrt{\frac{2}{3}} < x < \sqrt{\frac{2}{3}}$$

関数値を計算すると次の値を得る。

$$f\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{7}{9}$$

したがって、変曲点の座標は次のとおりである。

$$\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{7}{9}\right)$$

以上の情報から、y軸対称で両端が上へ伸び、中央に極大、その左右に極小をもつ 4 次関数の概形となる。

練習問題 3 重解をもつ 3 次関数のグラフ解答・解説

関数 $f(x) = x(x-2)^2$ の定義域はすべての実数である。
x軸との交点は$x = 0, 2$より、$(0, 0)$、$(2, 0)$である。$x = 2$は重解なので、グラフはx軸に接する。
最高次の項がx^3であるため、$x \to \infty$では$f(x) \to \infty$、$x \to -\infty$では$f(x) \to -\infty$となる。
導関数は $f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$ である。
導関数が 0 になるx座標は次のとおりである。

$$x = \frac{2}{3}, \quad x = 2$$

増減を調べると、次の区間では増加する。

$$x < \frac{2}{3}, \quad x > 2$$

次の区間では減少する。

$$\frac{2}{3} < x < 2$$

したがって、極大点の座標と極小点の座標は次のとおりである。

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{32}{27}\right), \quad (2, 0)$$

$x = 2$では極小値0をとり、グラフはx軸に接する。
2 次導関数は $f''(x) = 6x - 8$ である。
$f''(x) = 0$より、第 2 次導関数が 0 になるx座標は次のとおりである。

$$x = \frac{4}{3}$$

次の区間では第 2 次導関数が負なので上に凸である。

$$x < \frac{4}{3}$$

次の区間では第 2 次導関数が正なので下に凸である。

$$x > \frac{4}{3}$$

関数値を計算すると次の値を得る。

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{27}$$

したがって、変曲点の座標は次のとおりである。

$$\left(\frac{4}{3}, \frac{16}{27}\right)$$

増減、極値、凹凸、変曲点を合わせることで、$x = 2$でx軸に接する 3 次関数の形を判断できる。 y軸との交点は$f(0) = 0$より$(0, 0)$である。

練習問題 4 分数関数の漸近線と概形解答・解説

関数は次の式で表される。

$$f(x) = \frac{x + 1}{x - 2}$$

定義域は$x \neq 2$である。
変形すると、次の式になる。

$$f(x) = 1 + \frac{3}{x - 2}$$

したがって、垂直漸近線は$x = 2$、水平漸近線は$y = 1$である。
x軸との交点は$x + 1 = 0$より$(-1, 0)$である。
y軸との交点を調べると、次の値を得る。

$$f(0) = -\frac{1}{2}$$

したがって、y軸との交点は次のとおりである。

$$\left(0, -\frac{1}{2}\right)$$

導関数は次の式で表される。

$$f'(x) = -\frac{3}{(x - 2)^2}$$

したがって、$(-\infty, 2)$では減少し、$(2, \infty)$でも減少する。
第 2 次導関数は次の式で表される。

$$f''(x) = \frac{6}{(x - 2)^3}$$

$x < 2$では$f''(x) < 0$なので上に凸、$x > 2$では$f''(x) > 0$なので下に凸となる。
ただし、定義域が 2 つに分かれており、$x = 2$は含まれないため、変曲点は存在しない。

片側極限は$x \to 2-$で$f(x) \to -\infty$、$x \to 2+$で$f(x) \to \infty$となる。
また、$x \to \pm\infty$では$f(x) \to 1$となるため、水平漸近線$y = 1$に近づく。
以上より、2 本の漸近線$x = 2$、$y = 1$をもち、左右の区間でそれぞれ減少する双曲線状のグラフとなる。

練習問題 5 分数関数の端の様子解答・解説

関数は次の式で表される。

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$$

定義域は$x \neq 0$である。
式を変形すると、次の形になる。

$$f(x) = x - \frac{1}{x}$$

x軸との交点は $x^2 - 1 = 0$ より、$(-1, 0)$、$(1, 0)$である。
y軸との交点は存在しない。これは$x = 0$が定義域に含まれないためである。
また、$f(-x) = -f(x)$より原点対称である。
無限遠での様子を調べると、次の式が成り立つ。

$$f(x) - x = -\frac{1}{x} \to 0$$

したがって、斜漸近線は$y = x$である。また、$x = 0$は垂直漸近線である。
導関数は次の式で表される。

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$$

各定義域内、すなわち$(-\infty, 0)$と$(0, \infty)$では常に$f'(x) > 0$であるため、それぞれの区間で単調増加する。
したがって極値は存在しない。
第 2 次導関数は次の式で表される。

$$f''(x) = -\frac{2}{x^3}$$

$x < 0$では$f''(x) > 0$なので下に凸、$x > 0$では$f''(x) < 0$なので上に凸となる。
ただし、凹凸が変化する点は定義域内に存在しないため、変曲点はない。
以上より、原点対称で、漸近線$x = 0$と$y = x$をもち、左右の枝がそれぞれ異なる凹凸をもつグラフとなる。 また、端の様子を確認すると、$x \to 0-$では$f(x) \to \infty$、$x \to 0+$では$f(x) \to -\infty$となる。さらに、$x \to -\infty$では$f(x) \to -\infty$、$x \to \infty$では$f(x) \to \infty$となる。

練習問題 6 指数関数の無限遠での変化解答・解説

関数 $f(x) = e^x - 2x$ について考える。ただし、eは自然対数の底である。
定義域はすべての実数である。
y軸との交点は$f(0) = 1$より$(0, 1)$である。
x軸との交点について、$f'(x) = 0$となる点で最小値を調べる。
導関数は $f'(x) = e^x - 2$ である。
$f'(x) = e^x - 2$であり、$x < \log_e 2$では$f'(x) < 0$なので減少し、$x > \log_e 2$では$f'(x) > 0$なので増加する。したがって、$x = \log_e 2$での極小は全域での最小値となる。

$f'(x)=0$より$e^x=2$なので、$x=\log_e 2$である。
ここで、$e>2$より$0<\log_e 2<1$である。
2 次導関数は $f''(x)=e^x$ であり、常に正であるため、全域で下に凸である。
したがって$x=\log_e 2$で極小となる。
極小値は $f(\log_e 2)=2-2\log_e 2$ である。
この値は正であるため、x軸との交点は存在しない。
両端の様子を確認する。
$x\to-\infty$では$e^x\to 0$となり、$-2x$が増加するため$f(x)\to\infty$である。
$x\to\infty$については、$h(x)=e^x-2x$とおく。
$x\geq\log_e 3$では $h'(x)=e^x-2\geq 1$ である。
したがって、$h(x)-x$はこの範囲で減少しない。$a=\log_e 3$とすると、$x\geq a$で $h(x)-x\geq h(a)-a$ より、$h(x)\geq h(a)+(x-a)$となる。
右辺は$x\to\infty$で無限大になるため、$f(x)=h(x)\to\infty$である。
以上より、両端が上に伸び、中央に 1 つの極小をもつ下に凸のグラフとなる。

練習問題 7 自然対数を含む関数の概形解答・解説

関数 $f(x)=\log_e x-x$ について考える。ただし、eは自然対数の底である。
定義域は$x>0$である。
$x=0$は定義域外であり、垂直漸近線は$x=0$である。
導関数は次の式で表される。

$$f'(x)=\frac{1}{x}-1$$

$f'(x)=0$より$x=1$である。
$0<x<1$では$f'(x)>0$、$x>1$では$f'(x)<0$となるため、$x=1$で最大となる。
最大値は $f(1)=\log_e 1-1=-1$ である。
したがって、x軸との交点は存在しない。y軸との交点も定義域の条件から存在しない。
第 2 次導関数は次の式で表される。

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}$$

定義域全体で$f''(x)<0$なので、全域で上に凸である。
端の様子を調べる。
$x\to 0+$では$\log_e x\to-\infty$より$f(x)\to-\infty$である。
無限遠での変化を調べるため、$x\geq 2$の範囲では次の不等式が成り立つ。

$$f'(x)=\frac{1}{x}-1\leq-\frac{1}{2}$$

上の不等式より、$x\geq 2$の範囲では次の関数は増加しない。

$$f(x)+\frac{x}{2}$$

したがって、$x\geq 2$の範囲では次の不等式が成り立つ。

$$f(x)\leq f(2)-\frac{x-2}{2}$$

右辺は$x\to\infty$で$-\infty$へ向かうため、$f(x)\to-\infty$である。
以上より、$x=0$を垂直漸近線とし、全域で上に凸、最大値-1をもつグラフとなる。

練習問題 8 複数の情報を組み合わせた概形判断解答・解説

関数 $f(x) = x^4 - 2x^3$ について考える。
定義域はすべての実数である。
x軸との交点は $x^4 - 2x^3 = x^3(x-2) = 0$ より、$(0,0)$、$(2,0)$である。
y軸との交点は$f(0) = 0$より$(0,0)$である。
最高次の項がx^4であるため、$x \to \pm\infty$では$f(x) \to \infty$となる。
導関数は次の式で表される。

$$f'(x) = 2x^2(2x-3)$$

次の 2 区間では導関数が負なので減少する。

$$x < 0, \quad 0 < x < \frac{3}{2}$$

次の区間では導関数が正なので増加する。

$$x > \frac{3}{2}$$

$x = 0$では導関数が 0 になるが、関数は定義域全体で連続しており、左右で減少が続くため増減は変化しない。次の区間では関数は厳密に減少する。

$$x < \frac{3}{2}$$

導関数が 0 になるx座標は次のとおりである。

$$x = 0, \quad \frac{3}{2}$$

$x = 0$では導関数が 0 になるが、増減は変化しないため極値ではない。
次のx座標では減少から増加へ変化するため、極小となる。

$$x = \frac{3}{2}$$

極小値を求めると、次の値を得る。

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{16}$$

したがって、極小点の座標は次のとおりである。

$$\left(\frac{3}{2}, -\frac{27}{16}\right)$$

2 次導関数は $f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$ である。
$f''(x) = 0$より$x = 0, 1$である。
符号を調べると、
- $x < 0$では$f''(x) > 0$なので下に凸
- $0 < x < 1$では$f''(x) < 0$なので上に凸
- $x > 1$では$f''(x) > 0$なので下に凸

となる。
したがって変曲点は、$(0,0), (1,-1)$ である。
以上より、極小点の座標は次のとおりである。

$$\left(\frac{3}{2}, -\frac{27}{16}\right)$$

この関数は、両端が上へ伸び、$x = 0$では水平接線をもちながら極値にはならず、その後減少して極小点を通り、再び増加する 4 次関数の概形となる。

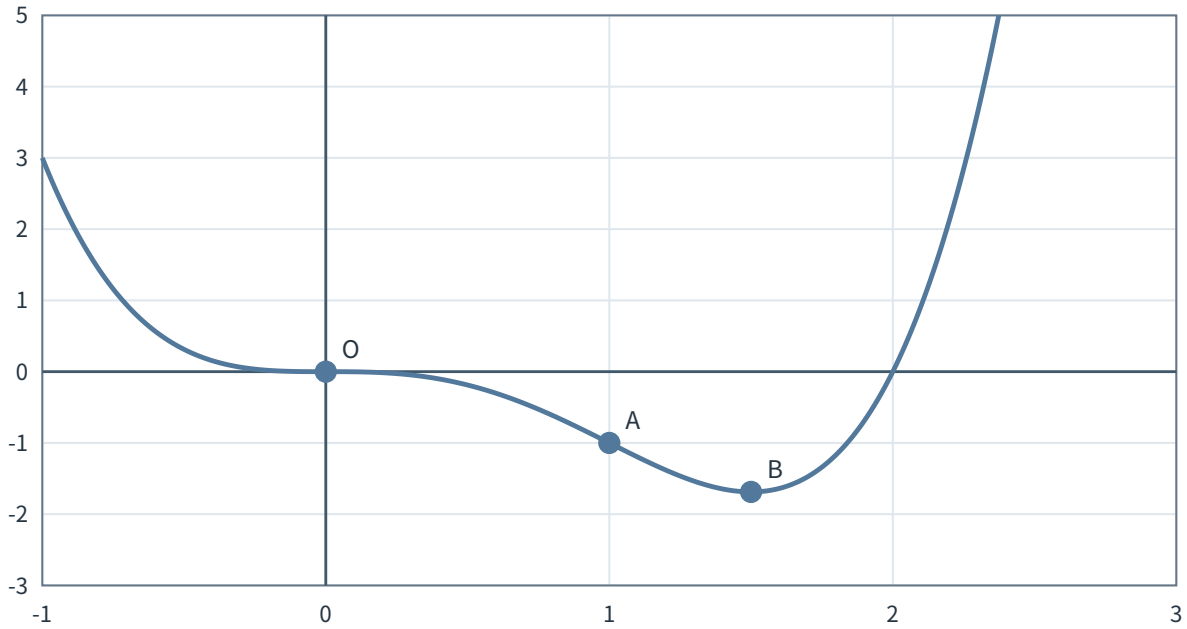

図 5　極値と変曲点を確認する 4 次関数のグラフ