第 201 講 速度・加速度

学習目標

この講では、次のことができる。
- 位置関数 $x(t)$ から速度 $v(t)$ と加速度 $a(t)$ を求めることができる。
- 平均速度と瞬間速度の違いを説明することができる。
- 速度の符号から運動方向を判断し、速さ $|v|$ との違いを説明することができる。
- 速度と加速度の符号から速さの増減を判断することができる。
- 静止する時刻と運動方向が反転する時刻を区別して考えることができる。

位置の変化から速度を考える

直線上を動く物体を考える。正の向きは右向きに固定する。
時刻 t は秒単位で測った数値、位置 $x(t)$ はメートル単位で測った位置の数値として表す。速度 $v(t)$ は m/s、加速度 $a(t)$ は $\mathrm{m/s^2}$ の単位を持つ数値として扱う。
位置関数 $x(t)$ は必要な範囲で 2 回微分可能であるとする。端点では、その式を近傍へ延長した運動を考えることで微分を扱う。
時刻 t から $t+\Delta t$ までの平均速度は、$\Delta t>0$ として位置の変化量を時間の変化量で割った量である。

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$$

この値は位置の変化の割合を表す。平均速度は向きを含む量であり、移動距離を時間で割った平均の速さとは定義が異なる。ただし、場合によっては両者の値が一致することもある。
瞬間速度は、平均速度で時間間隔を限りなく小さくしたものとして考える。微分の極限が存在するとき、右側から近づけた極限と両側の微分は一致する。

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$$

したがって、瞬間速度は $v(t)=x'(t)$ で求められる。

©ミライコーチング

位置関数の例

位置関数を $x(t) = t^2$ とする。横軸は時刻 t（秒）、縦軸は位置 x（m）を表す。この図では、時間が進むにつれて位置の変化の割合が大きくなる様子を確認できる。

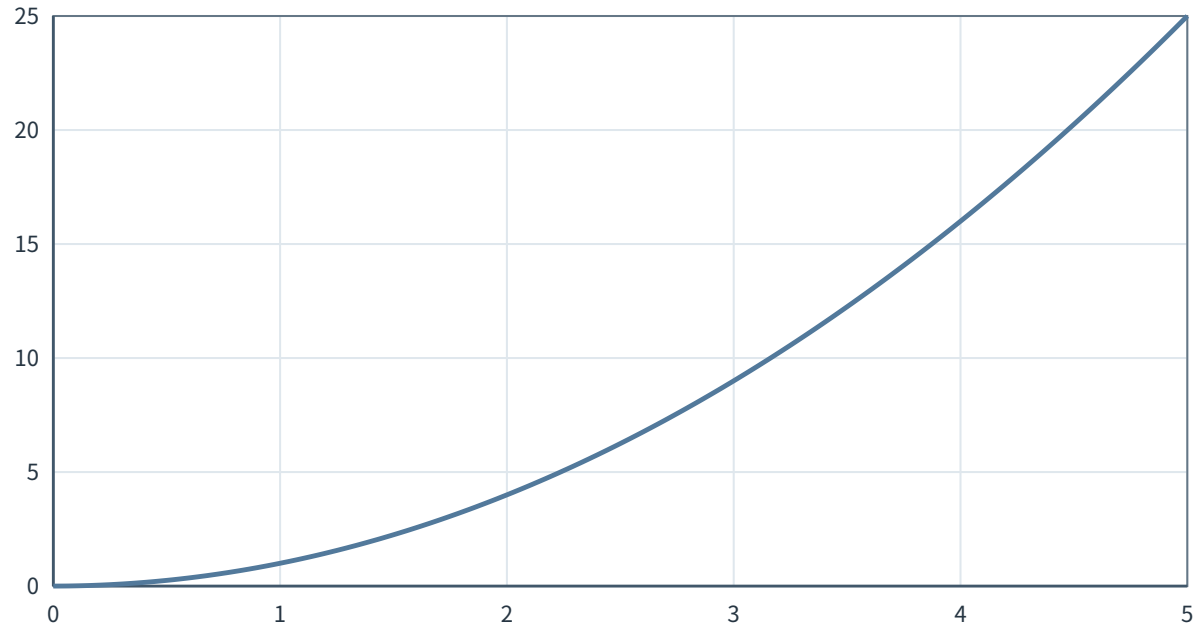

図 1　位置$x(t) = t^2$のグラフ

速度と加速度

速度は位置を微分したものである。

$$v(t) = x'(t)$$

速度の単位は m/s である。
さらに、速度の変化を見るために速度を微分する。加速度は次の式で表される。

$$a(t) = v'(t) = x''(t)$$

加速度の単位は $\mathrm{m/s^2}$ である。
したがって、位置・速度・加速度は次の順に微分でつながる。

$$x(t) \to v(t) = x'(t) \to a(t) = v'(t) = x''(t)$$

微分は「変化の割合」を調べる操作であり、位置の変化の割合が速度、速度の変化の割合が加速度を表している。

速度関数と加速度関数の対応

位置関数を $x(t) = t^2$ とすると、速度は $v(t) = 2t$ である。横軸は時刻 t（秒）、縦軸は速度 v（m/s）を表す。

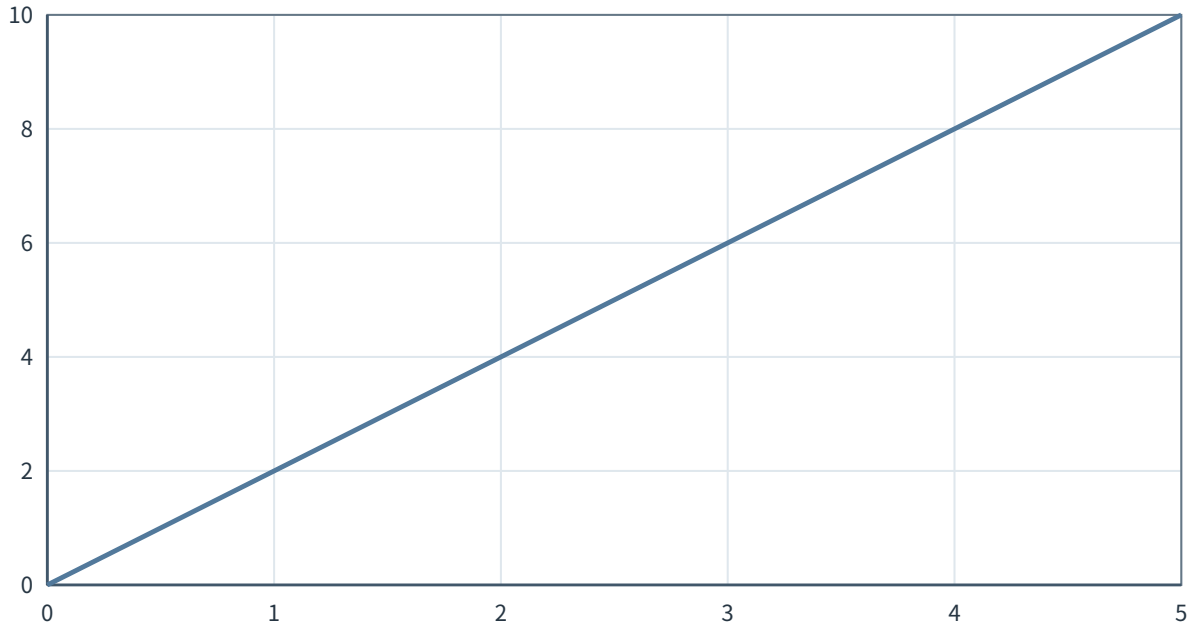

図 2　速度$v(t) = 2t$のグラフ

速度をさらに微分すると $a(t) = 2$ になる。横軸は時刻 t（秒）、縦軸は加速度 a（$\mathrm{m/s^2}$）を表す。

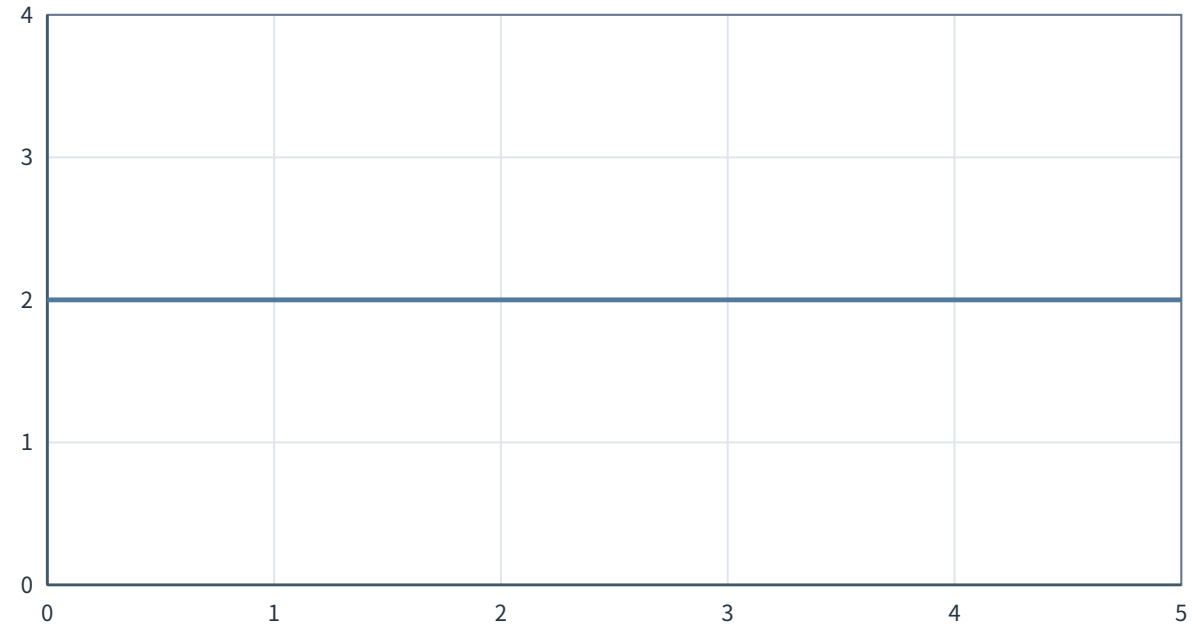

図 3　加速度$a(t) = 2$のグラフ

速度の符号と速さ

直線上の正の向きを決めると、速度の符号によって運動方向が分かる。
$v > 0$ なら正の向きに運動し、$v < 0$ なら負の向きに運動している。
一方、速さは速度の大きさだけを見る量であり、速さは $|\,v\,|$ で表す。
速度が $v = -5$ のとき、物体は負の向きへ動いているが、速さは $|\,-5\,| = 5$ である。

速度と加速度から速さの変化を見る

速さを $s(t) = |\,v(t)\,|$ と定める。
$v(t) > 0$ のときは $|\,v(t)\,| = v(t)$ であるため、$s'(t) = v'(t) = a(t)$ となる。
したがって、この範囲では $a(t) > 0$ なら速さは増加し、$a(t) < 0$ なら速さは減少する。
$v(t) < 0$ のときは $|\,v(t)\,| = -v(t)$ であるため、$s'(t) = -v'(t) = -a(t)$ となる。
したがって、この範囲では $a(t) < 0$ なら速さは増加し、$a(t) > 0$ なら速さは減少する。
この判断は時刻ごとの微分の符号によるものであり、ある区間全体で速さが単調に変化するかは区間内の符号変化も確認する必要がある。
また、$v(t) = 0$ となる瞬間だけでは運動方向の反転を判断できない。前後の速度の符号を調べて判断する。

この講の要点

位置 $x(t)$ を微分すると速度、速度を微分すると加速度が得られる。

- 位置 $x(t)$：m
- 速度 $v(t) = x'(t)$：m/s
- 加速度 $a(t) = v'(t) = x''(t)$：$\mathrm{m/s^2}$

速度は向きを含む量であり、速さは $|\,v\,|$ で表される。速さの増減は速度と加速度の符号を比較して判断する。

例題 1：位置から速度と加速度を求める

直線上を動く物体の時刻 t 秒後の位置関数は次の式である。

$$x(t) = t^3 - 3t^2 + 2$$

時刻の範囲は $0 \leq t \leq 4$ である。位置の単位は m である。
(1) 速度 $v(t)$ を求めよ。
(2) 加速度 $a(t)$ を求めよ。

例題 1 の解答・解説

速度は位置を微分して求める。

$$\begin{aligned} v(t) &= x'(t) \\ &= 3t^2 - 6t \end{aligned}$$

したがって、速度は $v(t) = 3t^2 - 6t$ である。
加速度は速度を微分して求める。

$$\begin{aligned} a(t) &= v'(t) \\ &= 6t - 6 \end{aligned}$$

したがって、加速度は $a(t) = 6t - 6$ である。

©ミライコーチング

例題 2：速度と速さを区別する

直線上を動く物体の速度関数は次の式である。

$$v(t) = -2t + 6$$

時刻の範囲は $0 \leq t \leq 5$ である。速度の単位は m/s である。
(1) $t = 1$ における速度を求めよ。
(2) $t = 1$ における速さを求めよ。
(3) $t = 4$ における運動方向を答えよ。

例題 2 の解答・解説

(1)

$$v(1) = -2 + 6 = 4$$

したがって、$t = 1$ における速度は 4 m/s である。
(2)
速さは速度の絶対値である。

$$|\, v(1) \,| = |\, 4 \,| = 4$$

したがって、$t = 1$ における速さは 4 m/s である。
(3)

$$v(4) = -8 + 6 = -2$$

速度が負であるため、物体は負の向きへ運動している。

例題 3：三角関数で表された運動

直線上を動く物体の位置関数は次の式である。

$$x(t) = 2\sin t$$

ここで、三角関数の角度はラジアンで表す。時刻の範囲は $0 \leq t \leq 2\pi$ であり、位置の単位は m である。
(1) 速度 $v(t)$ と加速度 $a(t)$ を求めよ。
(2) $t = \frac{\pi}{3}$ における速さが増加しているか減少しているかを答えよ。

©ミライコーチング

例題 3 の解答・解説

位置を微分すると速度が得られる。

$$v(t) = x'(t) = 2\cos t$$

さらに速度を微分すると加速度が得られる。

$$a(t) = v'(t) = -2\sin t$$

したがって、速度は $v(t) = 2\cos t$、加速度は $a(t) = -2\sin t$ である。
次に $t = \frac{\pi}{3}$ で考える。

$$v\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$$

$$a\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\sin\frac{\pi}{3} < 0$$

この時刻では $v > 0$ かつ $a < 0$ である。
$v > 0$ のとき、速さの変化は加速度の符号で決まる。したがって、速さは減少している。

演習問題

演習問題 1 多項式で表された位置から速度と加速度を求める

直線上を動く物体の時刻 t 秒後の位置関数は次の式である。

$$x(t) = 2t^3 - 3t^2 + t + 1$$

時刻の範囲は $0 \leq t \leq 3$ である。位置の単位は m である。
(1) 速度 $v(t)$ を求めよ。
(2) 加速度 $a(t)$ を求めよ。

演習問題 2 平均速度と瞬間速度を比較する

直線上を動く物体の位置が

$$x(t) = t^2 + 1$$

で表される。ただし、$0 \leq t \leq 3$ とする。位置の単位は m、時刻の単位は s である。
(1) 時刻 $t = 1$ から $t = 3$ までの平均速度を求めよ。
(2) 時刻 $t = 2$ における瞬間速度を求めよ。
(3) 今回、平均速度と瞬間速度が一致した理由と、一般には常に一致するわけではない理由を説明せよ。

©ミライコーチング

演習問題 3 速度と速さを区別する

直線上を動く物体の速度関数は次の式である。

$$v(t) = t^2 - 4t$$

時刻の範囲は $0 \leq t \leq 5$ である。速度の単位は m/s である。
(1) $t = 1$ における速度を求めよ。
(2) $t = 1$ における速さを求めよ。
(3) $t = 3$ における運動方向を答えよ。

演習問題 4 静止と運動方向の変化を判断する

直線上を動く物体の速度が

$$v(t) = t^2 - 1$$

で表される。ただし、$0 \leq t \leq 2$ とする。
(1) 物体が静止する時刻を求めよ。
(2) 一般に、速度が 0 になるという事実だけで運動方向が反転するといえるか。理由を説明せよ。
(3) この具体例では運動方向が反転するか判断せよ。

演習問題 5 速度と加速度の符号から速さの変化を判断する

ある時刻において、直線上を動く物体の速度と加速度について $v(t) < 0$ かつ $a(t) < 0$ である。
このとき、速さは増加するか減少するか。理由を説明せよ。

演習問題 6 三角関数で表される運動

直線上を動く物体の位置が、ラジアンを用いて

$$x(t) = 3\sin t$$

で表される。ただし、$0 \leq t \leq 2\pi$ とする。位置の単位は m である。
(1) 速度 $v(t)$ と加速度 $a(t)$ を求めよ。
(2) $t = \frac{\pi}{2}$ の前後で速さがどのように変化するか調べよ。

演習問題 7 指数関数で表される運動

直線上を動く物体の位置関数は次の式である。

$$x(t) = e^{-t}$$

ここで、e は自然対数の底である。時刻の範囲は $t \geq 0$ であり、位置の単位は m である。
(1) 速度 $v(t)$ を求めよ。
(2) 加速度 $a(t)$ を求めよ。
(3) 物体は正の向きと負の向きのどちらへ運動しているか答えよ。

©ミライコーチング

演習問題 8 速度と加速度を総合して判断する

直線上を動く物体の速度が

$$v(t) = t^2 - 6t + 5$$

で表される。ただし、$0 \leq t \leq 5$ とする。
(1) 加速度 $a(t)$ を求めよ。
(2) $t = 1$ と $t = 4$ における速度の符号を調べよ。
(3) $t = 1$ では前後の速さの変化を調べ、速さが最小になるか答えよ。また、$t = 4$ で速さが増加するか減少するか答えよ。

演習問題の解答・解説

練習問題 1 の解答・解説

速度は位置を微分して求める。

$$\begin{aligned} v(t) &= x'(t) \\ &= 6t^2 - 6t + 1 \end{aligned}$$

したがって、速度は $v(t) = 6t^2 - 6t + 1$ m/s である。
加速度は速度を微分して求める。

$$\begin{aligned} a(t) &= v'(t) \\ &= 12t - 6 \end{aligned}$$

したがって、加速度は $a(t) = 12t - 6$ m/s^2 である。

練習問題 2 の解答・解説

(1)
平均速度は次の式で求める。

$$\frac{x(3) - x(1)}{3 - 1}$$

$x(3) = 10$、$x(1) = 2$ であるから、平均速度は 4 m/s である。
(2)
瞬間速度は位置を微分して求める。
$v(t) = x'(t) = 2t$ であるから、$v(2) = 4$ となる。
したがって、瞬間速度は 4 m/s である。
(3)
今回は平均速度が 4 m/s、また $v(2) = 4$ m/s となるため、平均速度と瞬間速度は一致する。さらに $v(1) = 2$ m/s であり、この値とは一致しない。平均速度はある時間区間での位置変化の割合、瞬間速度は特定の時刻での位置変化の割合であり、定義が異なるため一般には常に一致するわけではない。

練習問題 3 の解答・解説

(1)

$$v(1) = 1 - 4 = -3$$

したがって、速度は -3 m/s である。
(2)
速さは速度の絶対値である。

$$| v(1) | = | -3 | = 3$$

したがって、速さは 3 m/s である。
(3)

$$v(3) = 9 - 12 = -3$$

速度が負であるため、負の向きへ運動している。

練習問題 4 の解答・解説

(1)
静止する時刻は速度が 0 になる時刻である。
$v(t) = t^2 - 1$ より、$t^2 - 1 = 0$ を解くと $t = 1$ である。
(2)
一般には、速度が 0 という事実だけで運動方向が反転するとはいえない。
例えば速度関数 $v(t) = (t-1)^2$ を考える。
$t = 1$ で速度は 0 になるが、前後の速度の符号は変化しない。
(3)
この具体例では、$0 \leq t < 1$ で $v(t) < 0$、$1 < t \leq 2$ で $v(t) > 0$ である。
したがって、速度の符号が負から正へ変化するため、$t = 1$ で運動方向は反転する。

練習問題 5 の解答・解説

速度が負であるため、速さは $s = | v | = -v$ と表せる。
したがって、$s' = -a$ である。
ここでは $a < 0$ なので、$s' = -a > 0$ となる。
よって、速さは増加する。

練習問題 6 の解答・解説

位置 $x(t) = 3\sin t$ を微分すると、速度は $v(t) = 3\cos t$ m/s である。
速度を微分すると、加速度は $a(t) = -3\sin t$ m/s^2 である。
$0 < t < \frac{\pi}{2}$ では $v > 0$、$a < 0$ であるため速さは減少する。
$\frac{\pi}{2} < t < \pi$ では $v < 0$、$a < 0$ であるため速さは増加する。
$t = \frac{\pi}{2}$ では速度が 0 になる。前後の速度の変化を見ると、速さは 0 へ近づいた後に増加する。
また、$s(t) = | v(t) |$ とすると、$t = \frac{\pi}{2}$ における左微分係数は -3、右微分係数は 3 で異なる。そのため、この点では $s(t)$ は微分できない。

練習問題 7 の解答・解説

(1)
位置 $x(t) = e^{-t}$ を微分すると、速度は $v(t) = -e^{-t}$ m/s である。
(2)
速度をさらに微分すると、加速度は $a(t) = e^{-t}$ m/s^2 である。
ここで e は自然対数の底を表す。
(3)
$t \geq 0$ では $e^{-t} > 0$ であるため、$v(t) = -e^{-t} < 0$ である。
したがって、物体は負の向きへ運動している。

練習問題 8 の解答・解説

(1)

$$a(t) = v'(t) = 2t - 6$$

したがって、加速度は $a(t) = 2t - 6$ m/s^2 である。
(2)
$t = 1$ では $v(1) = 0$ である。
$t = 4$ では $v(4) = -3$ である。
(3)
$t = 1$ の前では、$0 < t < 1$ において $v > 0$、$a < 0$ であるため速さは減少する。
$t = 1$ の後では、$1 < t < 3$ において $v < 0$、$a < 0$ であるため速さは増加する。
したがって、$t = 1$ では速さは 0 となり、速さは常に 0 以上であることから最小値 0 をとる極小である。
$t = 4$ では $v < 0$、$a > 0$ であるため、$|\,v\,| = -v$ より速さは減少する。