第 212 講 定積分の部分積分

学習目標

この講では、積の微分と端点評価を結び付け、定積分の部分積分を理由から使えるようになることを目標とする。

- 積の微分から定積分の部分積分公式を導くことができる。
- 境界項を、同じ積の上端値から下端値を引いた値として計算できる。
- 残る定積分が簡単になるように、微分する因子と積分する因子を選ぶことができる。
- 公式の外側のマイナスと、原始関数に由来するマイナスを区別できる。
- 区間全体で公式を使う条件が満たされているか判断できる。

積の微分を区間全体で積分する

積 $u(x)v(x)$ の微分には、u の変化による項と v の変化による項が現れる。

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

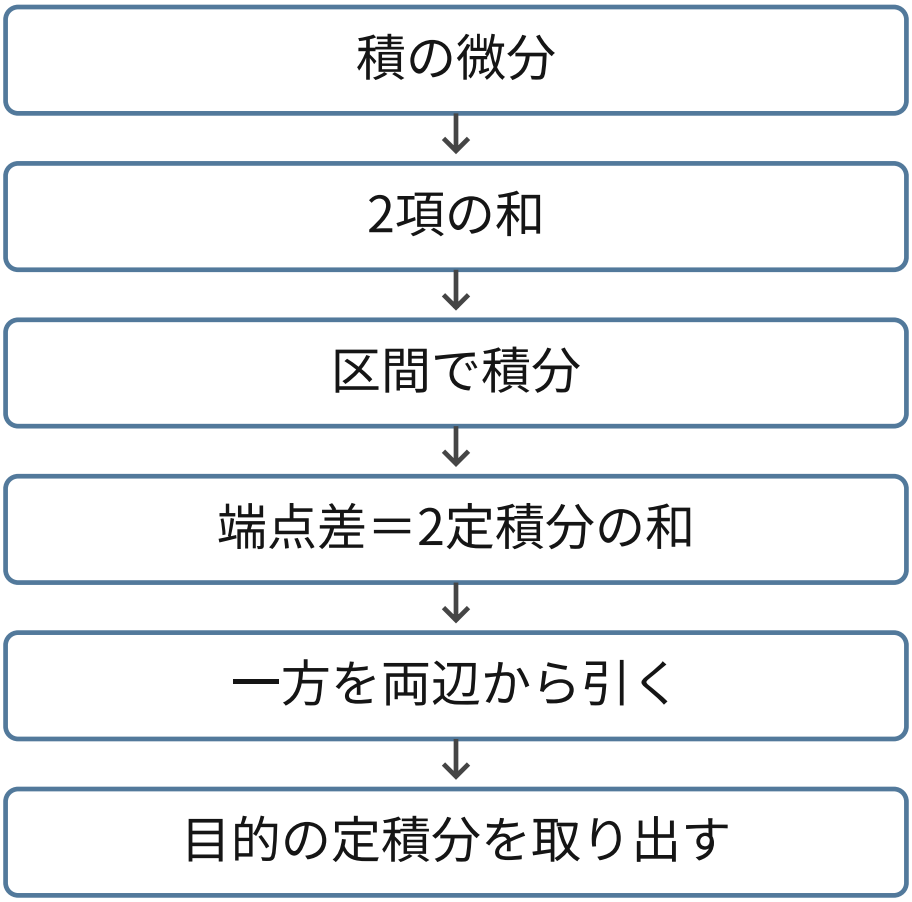
この等式を a から b まで積分すると、右辺は 2 つの定積分の和になる。

$$\int_a^b (u(x)v(x))'\,dx = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

左辺は、積 $u(x)v(x)$ の上端値と下端値の差である。したがって、次の関係を得る。

$$u(b)v(b) - u(a)v(a) = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

目的の $\int_a^b u(x)v'(x)\,dx$ を取り出すには、$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx$ を両辺から引けばよい。この移項によって、残る定積分の前にマイナスが付く。



図の最初の 2 段階は積の微分を 2 項の和へ展開することを表し、中央の段階はその等式を区間全体で積分することを表している。積分しただけでマイナスが生じるのではない。一方の定積分を両辺から引く最後の操作によって、目的の定積分が「境界項から残る定積分を引く形」になる。

定積分の部分積分公式

実数 $a < b$ とする。u, v は閉区間 $[a, b]$ を含む開区間で微分可能であり、u', v' は閉区間 $[a, b]$ 全体で連続であるとする。このとき、次の公式が成り立つ。

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

ここで、境界項は次の値である。

$$[u(x)v(x)]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$$

ここに示した条件は、本講で公式を安全に用いるための十分条件である。必要条件を述べたものではない。

境界項は同じ積の 2 つの値の差である

境界項では、上端と下端のそれぞれで同じ積 $u(x)v(x)$ を計算する。例えば、$F(x) = u(x)v(x) = (x+1)(x+2)$ を区間 $0 \le x \le 1$ で考えると、下端値は $F(0) = 2$、上端値は $F(1) = 6$ である。

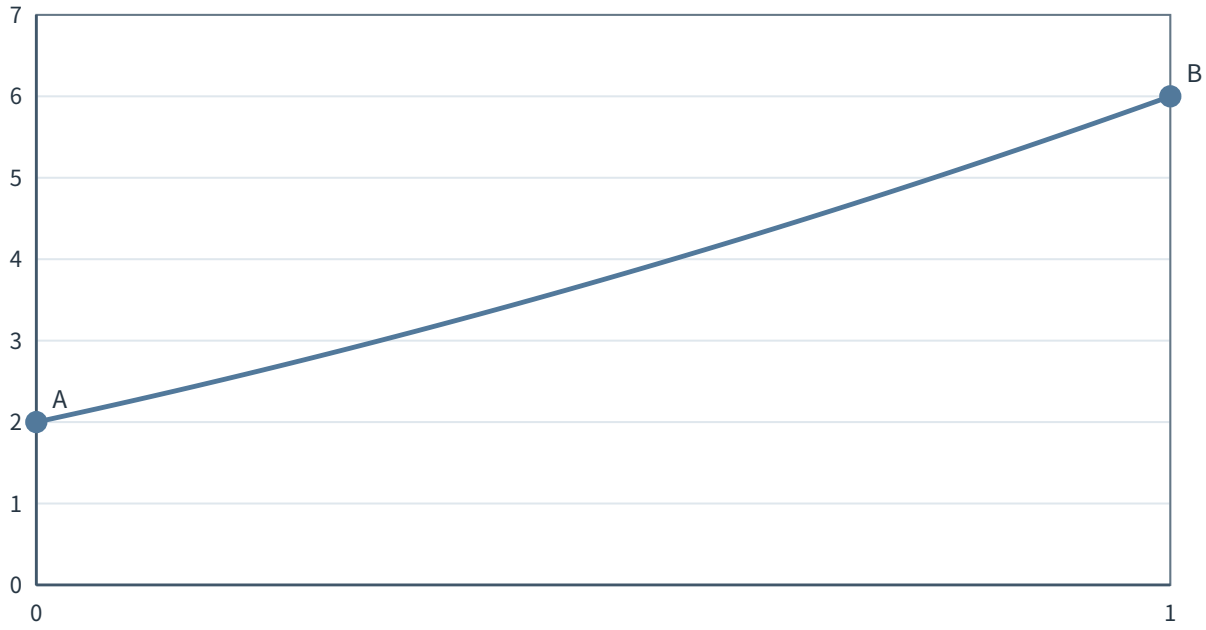


図 2　F(x)=(x+1)(x+2)：境界項は上端値から下端値を引く

図の点 A は下端での値 $(0, 2)$、点 B は上端での値 $(1, 6)$ を表す。このとき境界項は $[F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = 6 - 2 = 4$ である。
この 4 は 2 つの関数値の差であり、グラフの下の面積ではない。また、境界項は $(u(1) - u(0))(v(1) - v(0))$ でもない。上端では上端同士を掛け、下端では下端同士を掛けてから、下端側の積全体を引く。

因子を選ぶ判断軸

部分積分では、積をどちらの因子に分けるかによって、残る定積分の難しさが変わる。

- 多項式は、微分すると次数が下がることが多い。
- e^x は積分しても形が変わらない。
- $\sin x$ と $\cos x$ は、原始関数の符号まで確認する。
- $\log x$ だけが見えるときは、$1 \cdot \log x$ という積として考えられる。

これらは機械的な優先順位ではない。選んだ後に、残る $\int_a^b u'(x)v(x)\,dx$ が元の定積分より簡単になるかを確かめることが判断の中心である。

端点・符号・積分定数

境界項 $[uv]_a^b$ は、$u(b)v(b) - u(a)v(a)$ である。$(u(b) - u(a))(v(b) - v(a))$ としない。
公式の外側にはマイナスがある。さらに、$\sin x$ や e^{-x} を積分した結果にもマイナスが現れる場合があるため、残る定積分そのものの値を出してから、公式のマイナスを適用する。
固定された上下端をもつ定積分の答えは数値であり、積分変数や積分定数 C を残さない。
また、端点を含む区間全体で関数が定義され、本講の採用条件を満たすかを計算前に確認する。

例題

例題 1：積の微分から公式を導く

実数 $a < b$ とする。u, v は $[a, b]$ を含む開区間で微分可能であり、u', v' は $[a, b]$ 全体で連続であるとする。積の微分と微積分の基本的な関係を用いて、定積分の部分積分公式を導け。

例題 1 の解答・解説

積の微分は、次の 2 項の和である。

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

u', v' は $[a, b]$ で連続であり、微分可能な u, v は連続であるため、右辺の各項は $[a, b]$ で連続である。両辺を a から b まで積分すると、次の等式を得る。

$$\int_a^b (u(x)v(x))'\,dx = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

微積分の基本的な関係より、左辺は積の上端値から下端値を引いた値である。

$$u(b)v(b) - u(a)v(a) = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

ここで、$R = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$ とおく。上端での積は $u(b)v(b)$、下端での積は $u(a)v(a)$ であり、境界項は $u(b)v(b) - u(a)v(a)$ である。
R を両辺から引くと、公式の外側のマイナスを適用した寄与は $-R$ となる。したがって、定積分の部分積分公式は次の形である。

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

境界項は同じ積を 2 つの端点で評価した差である。端点差同士の積ではない。

例題 2：多項式と指数関数の積

$\int_0^1 xe^x\,dx$ を求めよ。

例題 2 の解答・解説

x を微分すると定数になり、e^x は積分しても形が変わらない。そこで、$u = x$、$v' = e^x$ と選ぶ。このとき、$u' = 1$、$v = e^x$ である。これらは区間 $[0, 1]$ 全体で本講の採用条件を満たす。
部分積分公式に代入すると、次の形になる。

$$\int_0^1 xe^x \, dx = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx$$

上端での積は $1 \cdot e = e$、下端での積は $0 \cdot 1 = 0$ である。したがって、境界項は $e - 0 = e$ である。
残る定積分を R とすると、$R = \int_0^1 e^x \, dx = e - 1$ である。公式の外側のマイナスを適用した寄与は $-R = 1 - e$ となる。

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^x \, dx &= e - (e - 1) \\ &= 1\end{aligned}$$

したがって、求める値は 1 である。

例題 3：三角関数の原始関数に由来するマイナス

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$ を求めよ。

例題 3 の解答・解説

x を微分して定数にすると残る定積分が簡単になるため、$u = x$、$v' = \sin x$ と選ぶ。このとき、$u' = 1$、$v = -\cos x$ である。これらは区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 全体で本講の採用条件を満たす。
部分積分公式に代入すると、次の形になる。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx = \left[-x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) \, dx$$

上端での積は $-\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 0$、下端での積は $-0 \cos 0 = 0$ である。したがって、境界項は $0 - 0 = 0$ である。
残る定積分そのものの値は、次のように負になる。

$$R = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) \, dx = -1$$

公式の外側のマイナスを適用した寄与は $-R = 1$ である。したがって、求める値は $0 - (-1) = 1$ である。
$v = -\cos x$ に含まれるマイナスと、部分積分公式の外側のマイナスを分けて書くと、符号の誤りを防げる。

演習問題

演習 1：既習例題を利用する

$\int_0^1 x^2 e^x \, dx$ を求めよ。残る定積分は例題 2 の結果を利用してよい。

演習 2：多項式と余弦の積

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$ を求めよ。

演習 3：対数を 1 との積と見る

自然対数を $\log x$ と表す。$\int_1^e \log x\,dx$ を求めよ。

演習 4：境界項の誤りを見抜く

$u=x$、$v'=e^x$ として $\int_0^1 xe^x\,dx$ を求めるとき、ある生徒は $u'=1$、$v=e^x$ とした後、次のように計算した。

$$\int_0^1 xe^x\,dx=(u(1)-u(0))(v(1)-v(0))-\int_0^1 u'(x)v(x)\,dx=(1-0)(e-1)-(e-1)=0$$

この計算の誤りを説明し、正しい境界項と積分値を求めよ。

演習 5：多項式どうしの積

$\int_0^1 x(1+x)\,dx$ を、$u=x$、$v'=1+x$ として部分積分により求めよ。

演習 6：因子選択を判断する

$I=\int_0^1 x\sin x\,dx$ に対し、$u=\sin x$、$v'=x$ と選ぶ方針は、部分積分公式を適用できるという意味で正しいか。また、この選択が計算に適しているかを、u'、v、境界項、残る定積分を示して判断せよ。最後に、より適した選択で I を求めよ。

演習 7：区間全体の条件を確認する

$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ に、本講の定積分の部分積分公式をそのまま適用できるか判断し、理由を述べよ。

演習 8：負の指数をもつ指数関数との積

$\int_0^1 xe^{-x}\,dx$ を求めよ。

©ミライコーチング

演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

x^2 を微分して次数を下げるため、$u = x^2$、$v' = e^x$ と選ぶ。このとき、$u' = 2x$、$v = e^x$ である。これらは区間 $[0, 1]$ 全体で本講の採用条件を満たす。
部分積分公式より、次の等式を得る。

$$\int_0^1 x^2 e^x \, dx = \left[x^2 e^x\right]_0^1 - \int_0^1 2x e^x \, dx$$

上端での積は $1^2 \cdot e = e$、下端での積は $0^2 \cdot 1 = 0$ であり、境界項は e である。
例題 2 より $\int_0^1 x e^x \, dx = 1$ であるため、残る定積分は $R = \int_0^1 2x e^x \, dx = 2$ である。公式の外側のマイナスを適用した寄与は $-R = -2$ となる。
したがって、求める値は $e - 2$ である。例題 2 の結果を利用すれば、同じ部分積分を長く繰り返す必要はない。

演習 2 の解答・解説

x を微分して定数にするため、$u = x$、$v' = \cos x$ と選ぶ。このとき、$u' = 1$、$v = \sin x$ である。これらは区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 全体で本講の採用条件を満たす。
部分積分公式より、次の等式を得る。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx = \left[x \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$$

上端での積は $\frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2}$、下端での積は $0 \cdot 0 = 0$ であり、境界項は $\frac{\pi}{2}$ である。
残る定積分は $R = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1$ であり、公式の外側のマイナスを適用した寄与は $-R = -1$ となる。
したがって、求める値は $\frac{\pi}{2} - 1$ である。

演習 3 の解答・解説

$\log x$ だけが見えるが、被積分関数を $1 \cdot \log x$ という積と見れば部分積分を使える。$u = \log x$、$v' = 1$ と選ぶと、$u' = \frac{1}{x}$、$v = x$ である。区間 $[1, e]$ は正の範囲に含まれるため、これらは区間全体で本講の採用条件を満たす。
部分積分公式より、次の等式を得る。

$$\int_1^e \log x \, dx = \left[x \log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot x \, dx$$

上端での積は $e \log e = e$ である。下端での積は $1 \cdot \log 1 = 0$ であり、1 ではない。したがって、境界項は $e - 0 = e$ である。
残る定積分は $R = \int_1^e 1 \, dx = e - 1$ であり、公式の外側のマイナスを適用した寄与は $-R = 1 - e$ となる。
したがって、求める値は $e - (e - 1) = 1$ である。
対数を微分した理由は、残る積 $\frac{1}{x} \cdot x$ が 1 になるためである。「対数は必ず微分する」という規則ではない。

演習 4 の解答・解説

$u=x$、$v'=e^x$ から $u'=1$、$v=e^x$ とした因子の選択は正しい。各端点への代入も、$u(1)-u(0)=1-0$、$v(1)-v(0)=e-1$ と正しく行われている。
u, v は $[0,1]$ を含む開区間で微分可能であり、u', v' は $[0,1]$ 全体で連続であるため、本講の採用条件を満たす。
誤りは、境界項を端点差同士の積 $(u(1)-u(0))(v(1)-v(0))$ としたことである。正しい境界項は、上端での積から下端での積を引いた値である。
上端での積は $u(1)v(1)=1\cdot e=e$、下端での積は $u(0)v(0)=0\cdot 1=0$ である。したがって、正しい境界項は $e-0=e$ となる。
残る定積分は $R=\int_0^1 e^x\,dx=e-1$ であり、公式の外側のマイナスを適用した寄与は $-R=1-e$ である。

$$\int_0^1 xe^x\,dx = e-(e-1)=1$$

したがって、正しい積分値は 1 である。誤式の右辺が 0 になるのは、境界項を端点差同士の積へ置き換えたためである。

演習 5 の解答・解説

指定に従い、$u=x$、$v'=1+x$ とする。このとき、$u'=1$、$v=x+\frac{x^2}{2}$ である。これらは区間 $[0,1]$ 全体で本講の採用条件を満たす。
部分積分公式より、次の等式を得る。

$$\int_0^1 x(1+x)\,dx = \left[x\left(x+\frac{x^2}{2}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \left(x+\frac{x^2}{2}\right)dx$$

上端での積は $1\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$、下端での積は $0\cdot 0=0$ である。したがって、境界項は $\frac{3}{2}$ である。
残る定積分は次の値である。

$$R=\int_0^1 \left(x+\frac{x^2}{2}\right)dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

公式の外側のマイナスを適用した寄与は $-R=-\frac{2}{3}$ となる。

$$\begin{aligned}\int_0^1 x(1+x)\,dx &= \frac{3}{2}-\frac{2}{3}\\ &= \frac{5}{6}\end{aligned}$$

したがって、求める値は $\frac{5}{6}$ である。上端の積 $\frac{3}{2}$ だけで計算を終えず、残る定積分まで評価する必要がある。

演習 6 の解答・解説

提示された選択 $u=\sin x$、$v'=x$ に対して、$u'=\cos x$、$v=\frac{x^2}{2}$ である。これらは区間 $[0,1]$ 全体で本講の採用条件を満たすため、この選択でも部分積分公式を適用できる。
上端での積は $u(1)v(1)=\frac{\sin 1}{2}$、下端での積は $u(0)v(0)=0\cdot 0=0$ である。したがって、境界項は $\frac{\sin 1}{2}$ となる。

この選択では、次の式を得る。

$$I = \frac{\sin 1}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 \cos x \, dx$$

残る定積分には x^2 が現れ、元の x より多項式の次数が上がっている。このため、公式を適用できるという意味では正しいが、計算を簡単にする選択ではない。
より適した選択は、$u = x$、$v' = \sin x$ である。このとき、$u' = 1$、$v = -\cos x$ となる。上端での積は $u(1)v(1) = -\cos 1$、下端での積は $u(0)v(0) = 0 \cdot (-1) = 0$ であり、境界項は $-\cos 1$ である。
残る定積分は $R_2 = \int_0^1 (-\cos x)\, dx = -\sin 1$ である。公式の外側のマイナスを適用した寄与は $-R_2 = \sin 1$ となる。

$$I = -\cos 1 - (-\sin 1) = \sin 1 - \cos 1$$

したがって、求める値は $\sin 1 - \cos 1$ である。
この値を提示された選択の式へ戻すと、その選択で残る定積分そのものの値は次のように確かめられる。

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 \cos x \, dx \\ &= \frac{\sin 1}{2} - I \\ &= \cos 1 - \frac{\sin 1}{2} \end{aligned}$$

公式の外側のマイナスを適用した寄与は $-R_1 = -\cos 1 + \frac{\sin 1}{2}$ である。境界項 $\frac{\sin 1}{2}$ と合わせると同じ正答になるが、残る積分を評価するために余分な手順が必要になる。因子選択では、適用できるかだけでなく、残る定積分が簡単になるかを確認する。

演習 7 の解答・解説

被積分関数 $\frac{1}{x}$ は、区間 $[0, 1]$ の下端 $x = 0$ で定義されない。したがって、本講で通常の定積分として採用した十分条件を区間全体で満たさない。
この段階で条件不成立と判断し、u、v'、u'、v は設定しない。上端での積、下端での積、境界項、残る定積分も評価しない。公式の外側のマイナスを適用した数値も作らない。
したがって、この講の定積分の部分積分公式をそのまま適用することはできない。端点で未定義の式を形式的に代入せず、広義積分へも進まない。

演習 8 の解答・解説

x を微分して定数にするため、$u = x$、$v' = e^{-x}$ と選ぶ。このとき、$u' = 1$、$v = -e^{-x}$ である。これらは区間 $[0, 1]$ 全体で本講の採用条件を満たす。
部分積分公式より、次の等式を得る。

$$\int_0^1 xe^{-x}\,dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 \left(-e^{-x}\right) dx$$

上端での積は $1 \cdot \left(-e^{-1}\right) = -\frac{1}{e}$、下端での積は $0 \cdot (-1) = 0$ である。したがって、境界項は $-\frac{1}{e}$ である。
残る定積分そのものの値は、次のように負になる。

$$R = \int_0^1 \left(-e^{-x}\right) dx = \frac{1}{e} - 1$$

公式の外側のマイナスを適用した寄与は $-R = 1 - \frac{1}{e}$ である。

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^{-x}\,dx &= -\frac{1}{e} - \left(\frac{1}{e} - 1\right) \\ &= 1 - \frac{2}{e}\end{aligned}$$

したがって、求める値は $1 - \frac{2}{e}$ である。$v = -e^{-x}$ のマイナス、残る定積分の負の値、公式の外側のマイナスを 1 段ずつ処理する。