第 240 講 双曲線

学習目標

- 双曲線を、2 焦点までの距離の差の絶対値が一定である点の軌跡として説明できる。
- 双曲線の基本形から、開く向き、頂点、焦点、漸近線を読み取れる。
- a, b, c の関係 $c^2 = a^2 + b^2$ を用いて、双曲線の方程式と焦点を求められる。

1. 2 焦点までの距離の差が双曲線をつくる

双曲線の焦点

異なる 2 定点 F_1, F_2 に対し、$|PF_1 - PF_2|$ が正の一定値である点 P の軌跡を双曲線という。ただし、その一定値は F_1F_2 より小さいものとする。F_1, F_2 を双曲線の焦点という。
一定値を $2a$、$F_1F_2 = 2c$ と書けば、条件は $|PF_1 - PF_2| = 2a$、$0 < a < c$ である。

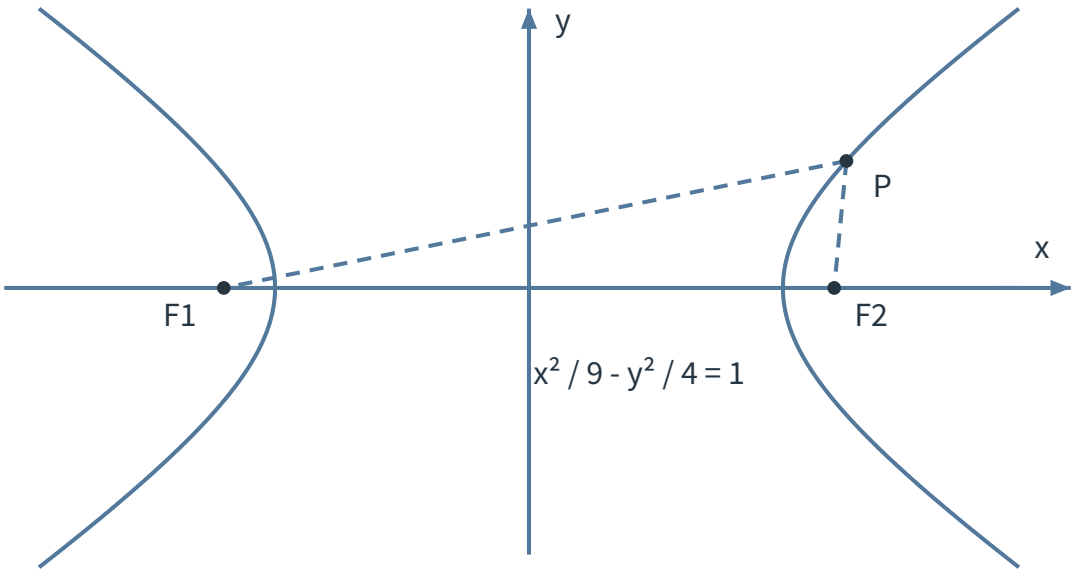

図 1　2 焦点からの距離の差の絶対値が 6 である双曲線

絶対値が 2 つの枝を表す

$PF_1 - PF_2 = 2a$ を満たす点は、一方の焦点に近い側の枝をつくる。$PF_2 - PF_1 = 2a$ を満たす点は、反対側の枝をつくる。絶対値を用いることで、この 2 つの枝を 1 つの条件で表せる。
三角不等式から $|PF_1 - PF_2| \leq F_1F_2$ である。一定値が 0 なら軌跡は 2 焦点の垂直二等分線、F_1F_2 なら焦点を結ぶ直線上の 2 本の半直線になり、どちらも通常の双曲線ではない。したがって、双曲線が 2 本の曲線として得られる非退化条件は $0 < 2a < 2c$ である。

2. 横軸型の双曲線の基本形

距離の条件から基本形へ

$0 < a < c$ とし、焦点を $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ とする。右側の枝では $PF_1 - PF_2 = 2a$ だから、点 $P(x, y)$ に対して

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

である。根号を一方ずつ孤立させて 2 回二乗し、整理すると

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

を得る。ここで $b^2 = c^2 - a^2$ とおけば $b > 0$ であり、

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

となる。左側の枝でも絶対値を用いた条件から同じ方程式を得る。逆に、この方程式では $|x| \geq a$ であり、各枝で二乗前の符号条件を満たすため、距離の差の絶対値は $2a$ となる。焦点を決める関係は

$$c^2 = a^2 + b^2$$

である。

横軸型の双曲線

$a > 0, b > 0$ のとき、$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ は左右に開く。頂点は $(\pm a, 0)$、焦点は $(\pm c, 0)$ で、$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ である。漸近線は $y = \pm \frac{b}{a}x$ である。

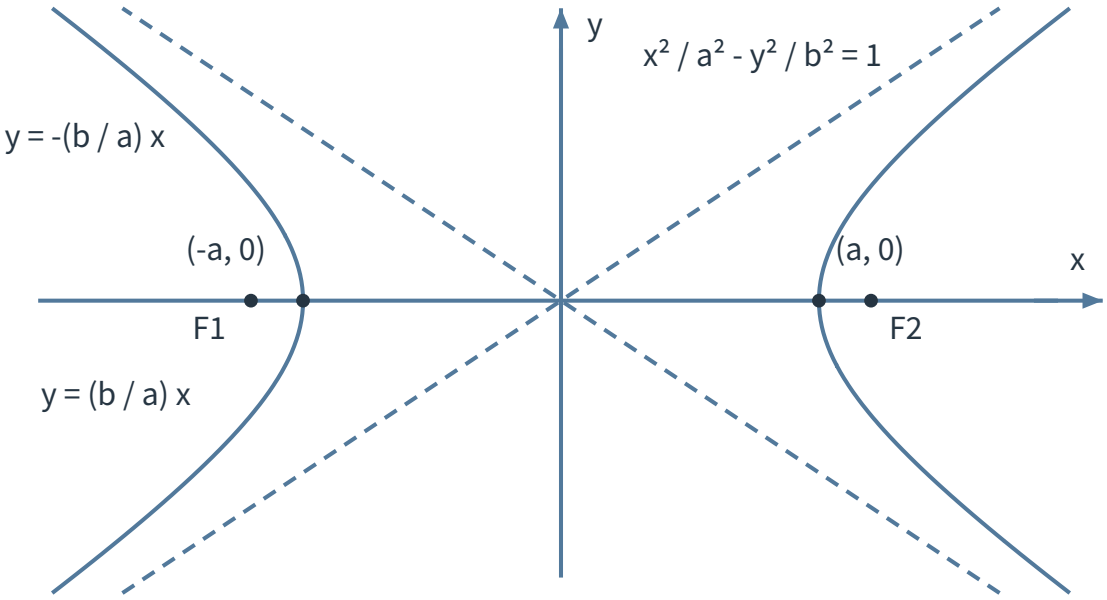

図 2　横軸型の双曲線の頂点・焦点・漸近線

漸近線が枝の向きを示す

基本形を $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ と見る。$|x|$ が大きいとき、a^2 の影響は相対的に小さくなり、y は $\pm\frac{b}{a}x$ に近づく。曲線は漸近線に近づき続けるが、交わらない。

例題 1：基本形から特徴を求める

双曲線 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ の開く向き、頂点、焦点、漸近線を求めよ。

例題 1 の解答・解説

x^2 の項が正なので左右に開く。$a = 4, b = 3$ であるから、頂点は $(\pm 4, 0)$ である。
$c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25$ より $c = 5$ なので、焦点は $(\pm 5, 0)$ である。漸近線は

$$y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{3}{4}x$$

である。

例題 2：焦点と距離の差から方程式を求める

焦点が $(\pm 5, 0)$ で、双曲線上の点から 2 焦点までの距離の差の絶対値が 6 である双曲線の方程式を求めよ。

例題 2 の解答・解説

$2a = 6$ より $a = 3$、焦点から $c = 5$ である。$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 9 = 16$ だから、求める方程式は

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

である。$0 < a < c$ も満たすので、非退化な双曲線である。

3. 縦軸型の双曲線

正の二乗項が開く向きを決める

$a > 0, b > 0$ のとき、$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ は上下に開く。正の符号をもつ y^2 の項が、双曲線の開く軸を示す。横軸型と同様に $c^2 = a^2 + b^2$ が成り立つ。

縦軸型の双曲線

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ の頂点は $(0, \pm a)$、焦点は $(0, \pm c)$ で、$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ である。漸近線は $y = \pm\frac{a}{b}x$ である。

©ミライコーチング

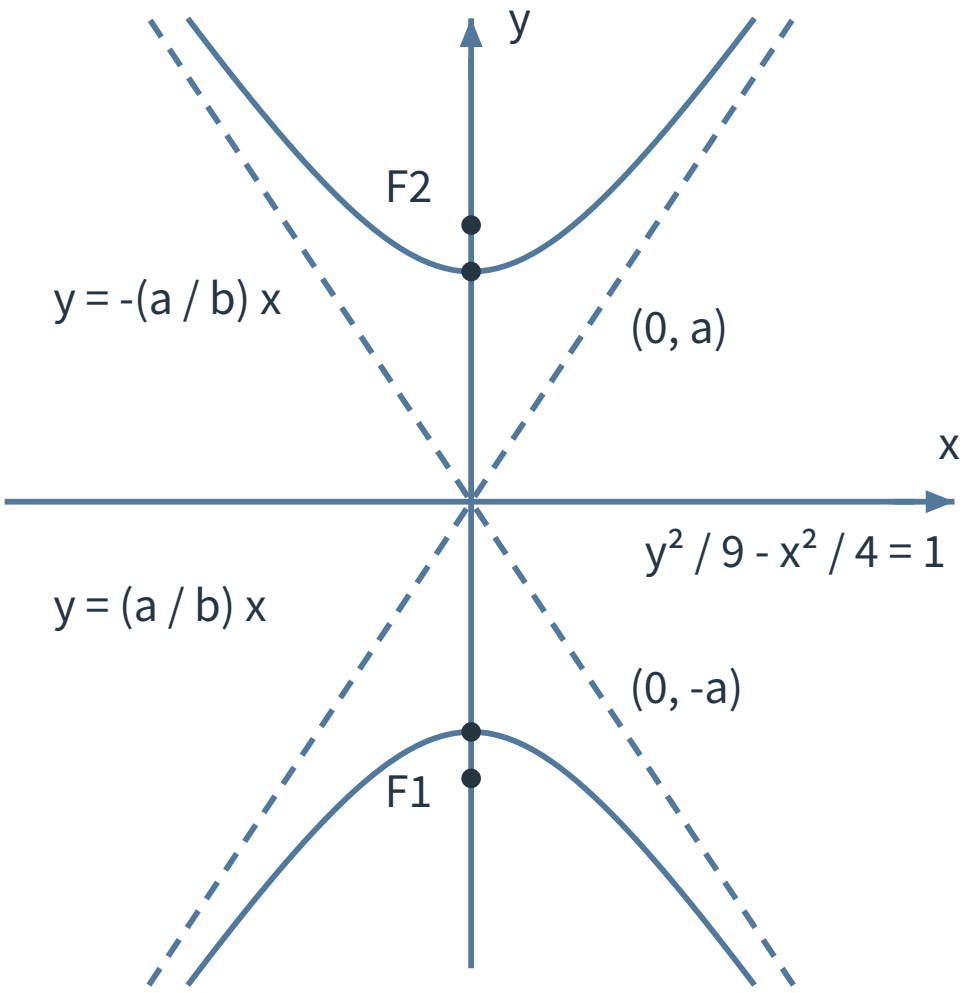

図 3　縦軸型の双曲線の頂点・焦点・漸近線

例題 3：縦軸型の双曲線

双曲線 $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{11} = 1$ の頂点、焦点、漸近線を求めよ。

例題 3 の解答・解説

$a = 5, b = \sqrt{11}$ であるから、頂点は $(0, \pm 5)$ である。$c^2 = 25 + 11 = 36$ より $c = 6$ なので、焦点は $(0, \pm 6)$ である。
漸近線は

$$y = \pm \frac{a}{b} x = \pm \frac{5}{\sqrt{11}} x$$

である。

4. 演習問題

演習 1：横軸型の読み取り

双曲線 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$ の頂点、焦点、漸近線を求めよ。

演習 2：縦軸型の読み取り

双曲線 $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$ の開く向き、頂点、焦点、漸近線を求めよ。

演習 3：焦点と頂点から方程式をつくる

焦点が $(\pm 5,0)$、頂点が $(\pm 3,0)$ である双曲線の方程式を求めよ。

演習 4：距離の差を確かめる

双曲線 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 上の点 $P\left(5,\frac{16}{3}\right)$ について、2 焦点までの距離の差の絶対値を求めよ。

演習 5：漸近線から基本形を求める

焦点が $(\pm 5,0)$ で、漸近線が $y=\pm\frac{4}{3}x$ である横軸型の双曲線の方程式を求めよ。

5. 演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

$a=5, b=2\sqrt{6}$ だから、頂点は $(\pm 5,0)$ である。$c^2=25+24=49$ より、焦点は $(\pm 7,0)$ である。漸近線は

$$y=\pm\frac{2\sqrt{6}}{5}x$$

である。

演習 2 の解答・解説

y^2 の項が正なので上下に開く。$a=3, b=4$ だから、頂点は $(0,\pm 3)$ である。$c^2=9+16=25$ より、焦点は $(0,\pm 5)$ である。漸近線は

$$y=\pm\frac{3}{4}x$$

である。

演習 3 の解答・解説

頂点から $a=3$、焦点から $c=5$ である。$b^2=c^2-a^2=25-9=16$ だから、方程式は

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$$

である。

演習 4 の解答・解説

$a=3, b=4$ より $c^2=9+16=25$ だから、焦点は $F_1(-5,0), F_2(5,0)$ である。点 $P\left(5, \frac{16}{3}\right)$ は

$$\frac{25}{9}-\frac{\left(\frac{16}{3}\right)^2}{16}=\frac{25}{9}-\frac{16}{9}=1$$

を満たす。距離は

$$PF_1=\sqrt{10^2+\left(\frac{16}{3}\right)^2}=\frac{34}{3}, \qquad PF_2=\frac{16}{3}$$

であるから、距離の差の絶対値は $\frac{34}{3}-\frac{16}{3}=6$ である。これは $2a=6$ と一致する。

演習 5 の解答・解説

横軸型では漸近線の傾きの大きさが $\frac{b}{a}$ だから、$b:a=4:3$ とおける。$a=3k, b=4k$ とすると、

$$c^2=a^2+b^2=9k^2+16k^2=25k^2$$

である。$c=5$ より $k=1$ だから、$a=3, b=4$ である。したがって、方程式は

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$$

である。