

第 121 講 対数の性質

学習目標

この講では、対数の積・商・累乗の性質を、指数法則と対数の定義から説明できるようになることを目標とする。

また、対数の計算に必要な条件を確認し、式変形できる範囲とできない範囲を判断できるようになることを目標とする。

さらに、底の変換公式を指数表示から導き、異なる底の対数を扱えるようになることを目標とする。

対数の定義

$a > 0$ 、 $a \neq 1$ 、 $M > 0$ のとき、 $a^p = M$ を満たす実数 p を $p = \log_a M$ と表す。

対数は「底 a を何乗すると真数 M になるか」を表す数である。

以下の性質では $a > 0$ 、 $a \neq 1$ とし、特に断らない限り真数は正とする。

積の性質と商の性質

対数の性質は、指数の計算を逆向きに見たものである。

$M > 0$ 、 $N > 0$ とし、 $p = \log_a M$ 、 $q = \log_a N$ と置くと、対数の定義より、 $M = a^p$ 、 $N = a^q$ である。

積について考えると、次のように計算する。

$$\begin{aligned} MN &= a^p \cdot a^q \\ &= a^{p+q} \end{aligned}$$

したがって、 MN は底 a の $p+q$ 乗であるから、 $\log_a (MN) = p+q$ となる。

よって、 $\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$ が成り立つ。

同じように商について、次のように計算する。

$$\begin{aligned} \frac{M}{N} &= \frac{a^p}{a^q} \\ &= a^{p-q} \end{aligned}$$

対数の定義から、次の式を得る。

$$\log_a \left(\frac{M}{N} \right) = \log_a M - \log_a N$$

ただし、積や商の性質を使う前に、真数が正であることを確認する必要がある。

底は2

真数：積

$$\boxed{4} \times \boxed{8} = \boxed{32}$$

$$\downarrow \log_2 \quad \downarrow \log_2 \quad \downarrow \log_2$$

対数の値（指数）：和

$$\boxed{2} + \boxed{3} = \boxed{5}$$

真数：商

$$\boxed{8} \div \boxed{4} = \boxed{2}$$

$$\downarrow \log_2 \quad \downarrow \log_2 \quad \downarrow \log_2$$

対数の値（指数）：差

$$\boxed{3} - \boxed{2} = \boxed{1}$$

図1 底は2。上の組は $4 \times 8 = 32$ に $2 + 3 = 5$ が対応し、下の組は $8 \div 4 = 2$ に $3 - 2 = 1$ が対応する。各 $\log_2$ の矢印は、真数から対数の値（指数）へ向く。

累乗の性質

$M > 0$ 、 r が実数のとき、 $\log_a (M^r) = r \log_a M$ が成り立つ。

r が整数の場合だけでなく、0、負数、分数の場合にも成立する。

これは、指数の範囲を整数から有理数、実数へ広げたときも指数法則が保たれるように定義されているためである。

ただし、 M は必ず正でなければならない。

累乗の性質を指数法則から導く

$p = \log_a M$ と置くと、 $M = a^p$ である。

したがって、次のように計算する。

$$\begin{aligned} M^r &= (a^p)^r \\ &= a^{pr} \end{aligned}$$

対数の定義より、 $\log_a (M^r) = pr$ である。

また、 $p = \log_a M$ なので、 $\log_a (M^r) = r \log_a M$ となる。

対数の性質で注意すること

$a > 0$ 、 $a \neq 1$ 、 $M > 0$ 、 $N > 0$ の条件で考える。

$\log_a (MN)$ や $\log_a \left(\frac{M}{N}\right)$ は積や商の性質によって分解できるが、 $\log_a (M + N)$ は一般には対数の和へ分解できない。

例えば、 $M = N = 4$ のとき、 $\log_2 (4 + 4) = \log_2 8 = 3$ である。

一方、 $\log_2 4 + \log_2 4 = 2 + 2 = 4$ となるため、 $\log_2 (4 + 4) \neq \log_2 4 + \log_2 4$ である。

したがって、 $\log_a (M + N)$ を積の性質と同じように分解することはできない。

また、 $\log_a (x^2) = 2 \log_a x$ を使う場合は定義域に注意する必要がある。

左辺は $x^2 > 0$ より $x \neq 0$ で定義できる。

しかし右辺の $\log_a x$ は $x > 0$ でなければ定義できない。

例えば $x = -2$ のとき、 $\log_a ((-2)^2) = \log_a 4$ は定義できるが、 $2 \log_a (-2)$ は定義できない。

したがって、式変形では定義域を確認し、成立する条件を保つ必要がある。

底の変換公式

$a > 0$ 、 $a \neq 1$ 、 $c > 0$ 、 $c \neq 1$ 、 $M > 0$ のとき、次の公式が成り立つ。

$$\log_a M = \frac{\log_c M}{\log_c a}$$

底の変換公式の導出

$p = \log_a M$ と置く。

対数の定義より、 $M = a^p$ である。

両辺の底を c とする対数を取ると、 $\log_c M = \log_c (a^p)$ となる。

累乗の性質より、 $\log_c M = p \log_c a$ である。

ここで、次のように計算する。

$$p = \frac{\log_c M}{\log_c a}$$

$p = \log_a M$ であるから、次の式を得る。

$$\log_a M = \frac{\log_c M}{\log_c a}$$

なお、分母の $\log_c a$ は 0 ではない。

もし $\log_c a = 0$ なら、対数の定義より $a = c^0 = 1$ となるが、底は $a \neq 1$ であるため矛盾する。

例題 1

次の値を求めなさい。

$$\log_2 32 - \log_2 4 + \log_2 8$$

例題 1 の解答・解説

対数の商・積の性質を使う前に、それぞれの真数を確認する。

32、4、8 はすべて正であるため、対数の計算ができる。

それぞれを底 2 の累乗で表す。

$$32 = 2^5, \quad 4 = 2^2, \quad 8 = 2^3$$

したがって、次のように計算する。

$$\begin{aligned} \log_2 32 - \log_2 4 + \log_2 8 &= 5 - 2 + 3 \\ &= 6 \end{aligned}$$

また、性質をまとめて使う場合は、次のように考えることもできる。

$$\log_2 \left(\frac{32 \cdot 8}{4} \right)$$

真数は、 $\frac{32 \cdot 8}{4} = 64$ であり、 $\log_2 64 = 6$ となる。

したがって、求める値は6である。

例題 2

次の式を簡単にしなさい。また、式が成り立つ条件を答えなさい。

$$\log_3 (x^2) - 2 \log_3 x$$

例題 2 の解答・解説

まず、それぞれの式が定義できる条件を確認する。

左辺の第 1 項は、 $x^2 > 0$ より、 $x \neq 0$ で定義できる。

一方、第 2 項の $\log_3 x$ は、 $x > 0$ が必要である。

したがって、式全体が定義できる条件は、 $x > 0$ である。

この条件のもとで、累乗の性質を使うと、 $\log_3 (x^2) = 2 \log_3 x$ である。

よって、次のように計算する。

$$\begin{aligned} \log_3 (x^2) - 2 \log_3 x &= 2 \log_3 x - 2 \log_3 x \\ &= 0 \end{aligned}$$

注意すべき点は、 $x < 0$ では左辺の第 1 項だけは定義できる場合があることである。

例えば $x = -3$ では、 $\log_3 ((-3)^2) = \log_3 9$ は定義できる。

しかし、 $\log_3 (-3)$ は定義できないため、右辺の形へ変形してはいけない。

例題 3

底を2へ変換して、次の値を求めなさい。

$$\log_4 8$$

例題 3 の解答・解説

底の変換公式を使う。

$$\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4}$$

分子と分母を計算すると、 $\log_2 8 = 3$ 、 $\log_2 4 = 2$ となる。

したがって、 $\log_4 8 = \frac{3}{2}$ である。

ここで、底の条件を確認する。

底4と底2はともに、 $4 > 0$, $4 \neq 1$, $2 > 0$, $2 \neq 1$ を満たす。

また、真数8について、 $8 > 0$ であるため対数は定義できる。

さらに、底の変換公式の分母について、 $\log_2 4 = 2 \neq 0$ であり、割り算も正しく行える。

同じ結果を指数の形から見ることもできる。

$\log_4 8 = p$ と置くと、 $4^p = 8$ である。

底を2にそろえると、 $(2^2)^p = 2^3$ となるので、 $2^{2p} = 2^3$ より、 $2p = 3$ である。

したがって、 $p = \frac{3}{2}$ となる。

底の変換公式は、異なる底の対数を計算する方法であり、指数表示では「同じ底にそろえて指数を比較する」意味を持つ。

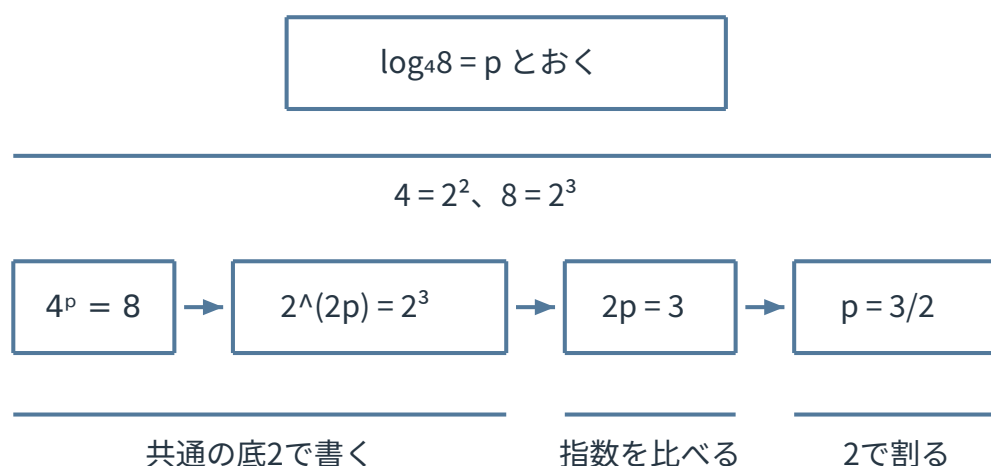


図2 $p = \log_4 8$ とおき、 $4 = 2^2$ 、 $8 = 2^3$ を使う。 $4^p = 8 \Rightarrow 2^{2p} = 2^3 \Rightarrow 2p = 3 \Rightarrow p = \frac{3}{2}$ 。したがって $\log_4 8 = \frac{3}{2}$ 。

練習問題 1

次の値を求めなさい。

$$\log_2 16 + \log_2 4 - \log_2 8$$

練習問題 2

次の値を求めなさい。

$$\log_3 27 + \log_3 \frac{1}{9}$$

練習問題 3

次の値を求めなさい。

$$\log_5 \sqrt{5}$$

練習問題 4

次の式を簡単にしなさい。

$$\log_2 (x^4) - 4 \log_2 x$$

ただし、式が定義できる範囲で考えること。

練習問題 5

次の等式を計算して正しいか判断し、理由を説明しなさい。

$$\log_2 (4 + 8) = \log_2 4 + \log_2 8$$

練習問題 6

次の対数を底の変換を利用して求めなさい。

$$\log_4 16$$

練習問題 7

次の値を求めなさい。また、底と真数の条件を確認しなさい。

$$\log_3 \left(9^{-\frac{3}{2}} \right)$$

練習問題 8

次の式について、定義できる範囲を答えなさい。

$$\log_5 (x^2 - 4)$$

練習問題 1 の解答・解説

真数は16、4、8であり、すべて正なので対数の計算ができる。

底を2とする累乗で表す。

$$16 = 2^4, \quad 4 = 2^2, \quad 8 = 2^3$$

したがって、次のように計算する。

$$\begin{aligned} \log_2 16 + \log_2 4 - \log_2 8 &= 4 + 2 - 3 \\ &= 3 \end{aligned}$$

積・商の性質を使う場合でも、真数が正であることを確認してから計算することが重要である。

練習問題 2 の解答・解説

まず、分数の真数を指数で表す。

$$\frac{1}{9} = 3^{-2}$$

また、 $27 = 3^3$ である。

したがって、次のように計算する。

$$\begin{aligned}\log_3 27 + \log_3 \frac{1}{9} &= 3 + (-2) \\ &= 1\end{aligned}$$

負の指数が現れる場合も、指数法則により正しく扱える。

$3^{-2} = \frac{1}{3^2}$ であるため、真数は正であり対数は定義できる。

練習問題 3 の解答・解説

平方根を指数で表す。

$$\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$$

したがって、 $\log_5 \sqrt{5} = \log_5 (5^{\frac{1}{2}})$ となる。

対数の定義より、 $\log_5 (5^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}$ である。

分数指数の場合でも、真数5は正であるため累乗の性質を利用できる。

練習問題 4 の解答・解説

まず定義域を確認する。

第1項では、 $x^4 > 0$ より $x \neq 0$ である。

第2項では、 $\log_2 x$ が含まれるため、 $x > 0$ が必要である。

したがって、式全体では $x > 0$ で考える。

この条件のもとで、累乗の性質を使う。

$\log_2 (x^4) = 4 \log_2 x$ であるから、次のように計算する。

$$\begin{aligned}\log_2 (x^4) - 4 \log_2 x &= 4 \log_2 x - 4 \log_2 x \\ &= 0\end{aligned}$$

第1項 $\log_2 (x^4)$ だけを見ると、真数 x^4 が正になるため $x \neq 0$ で定義できる。

しかし、式全体では第2項 $4 \log_2 x$ が含まれるため、 $\log_2 x$ を定義する条件 $x > 0$ が必要である。

また、 $\log_2 (x^4) = 4 \log_2 x$ という累乗の性質を使えるのも $x > 0$ の範囲である。

したがって、左辺の一部が定義できることだけで右辺への変形を許してはいけない。

練習問題 5 の解答・解説

左辺を計算する。

$$\log_2 (4 + 8) = \log_2 12$$

もし右辺の値と等しいなら、 $\log_2 12 = 5$ である必要がある。

しかし、 $2^5 = 32 \neq 12$ であるため、 $\log_2 12 \neq 5$ となる。

一方、右辺はそれぞれ計算すると、 $\log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$ である。

したがって、 $\log_2 (4 + 8) \neq \log_2 4 + \log_2 8$ であり、この等式は正しくない。

対数の積の性質は積の形に対して成り立つものであり、和の形へそのまま適用することはできない。

練習問題 6 の解答・解説

底を変換する。

底の変換公式より、次のように計算する。

$$\log_4 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 4}$$

分母について、 $\log_2 4 = 2$ となる。

また、 $\log_2 16 = 4$ である。

したがって、次のように計算する。

$$\frac{\log_2 16}{\log_2 4} = \frac{4}{2} = 2$$

分母が 0 でないことも確認する必要がある。

もし $\log_2 4 = 0$ なら、 $4 = 2^0 = 1$ となり矛盾するため、分母は 0 ではない。

練習問題 7 の解答・解説

底の条件を確認する。

底 3 は、 $3 > 0$, $3 \neq 1$ を満たす。

また、真数について、 $9^{-\frac{3}{2}} > 0$ であるため、対数は定義できる。

累乗の性質を使う。

$\log_3 (9^{-\frac{3}{2}}) = -\frac{3}{2} \log_3 9$ となる。

ここで、 $9 = 3^2$ より、 $\log_3 9 = 2$ である。

したがって、次のように計算する。

$$\begin{aligned} \log_3 (9^{-\frac{3}{2}}) &= -\frac{3}{2} \times 2 \\ &= -3 \end{aligned}$$

よって、求める値は -3 である。

練習問題 8 の解答・解説

対数が定義されるためには、真数が正である必要がある。

したがって、 $x^2 - 4 > 0$ を満たす x の範囲を求める。

因数分解すると、 $(x - 2)(x + 2) > 0$ である。

積が正になるのは、2 つの因数が同符号のときである。

したがって、 $x < -2$ または $x > 2$ となる。

よって、 $\log_5 (x^2 - 4)$ が定義できる範囲は、 $x < -2$ または $x > 2$ である。

なお、底については、 $5 > 0$, $5 \neq 1$ なので条件を満たしている。