

第 175 講 無限級数

学習目標

- ・無限級数を、部分和の数列の極限として考え、収束・発散を判断できる。
- ・項の極限が 0 であることの必要性和、その逆が成り立たないことを説明できる。

無限に足すとは、部分和の極限を見ることである

有限個の数を足す場合は、最後の項まで足せば値が決まる。しかし、無限個の項を足す場合、無限そのものを数や項として扱うことはできない。

そこで、初めの n 項までを足した有限和を考える。

級数の収束を判断するときに見る量は、1 つ 1 つの項 u_n ではなく、その累積である部分和 S_n である。項が小さくなっていくことと、累積した値が落ち着くことは別の問題である。

無限級数では、順番を固定して初めの項から順に足すという考え方を守る。

無限級数の定義

n は正整数とし、 u_n は各 n で定まる有限実数とする。

S_n を初めの n 項の有限和として

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

で定める。

部分和の数列 S_n が有限実数 S へ収束するとき、級数は収束し、その和を S とする。

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = S$$

と表す。

部分和の数列 S_n が収束しない場合、級数は発散する。

この無限和の記号では、 ∞ を項番号や数値として代入して計算してはいけない。

収束するための必要条件

級数が収束するとき、各項の極限は必ず 0 になる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

である。

実際、 $n \geq 2$ では $u_n = S_n - S_{n-1}$ である。

S_n が S へ収束するとき、 S_{n-1} も S へ収束するため、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

となる。

したがって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

が必要である。

ただし、この条件は十分条件ではない。項が 0 へ近づいても、部分和が一定値へ近づくとは限らない。

必要条件の使い方

u_n が 0 へ収束しない場合、その級数は必ず発散する。
 一方で、 u_n が 0 へ収束する場合は、それだけでは収束とは判断できない。
 項の値 u_n と、項を積み重ねた部分 S_n は別の量である。

例題 1

級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

が収束するか調べ、その和を求めよ。

例題 1 の解答・解説

部分分数分解すると、

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

である。

n 項までの有限部分 S_n とする。 $n \geq 2$ では、有限和を 2 つの和に分けると、

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

となる。

実際、 $n \geq 2$ では、 $\frac{1}{2}$ から $\frac{1}{n}$ までの項が相殺される。

また、 $n = 1$ では、

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

であり、

$$1 - \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

となるため、同じ式が成立する。

したがって、有限和の中で相殺を行ってから極限を取ると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

である。

よって、この級数は収束し、和は 1 である。

また、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0$$

であり、項の極限 0 と部分和の極限 1 は異なる量である。

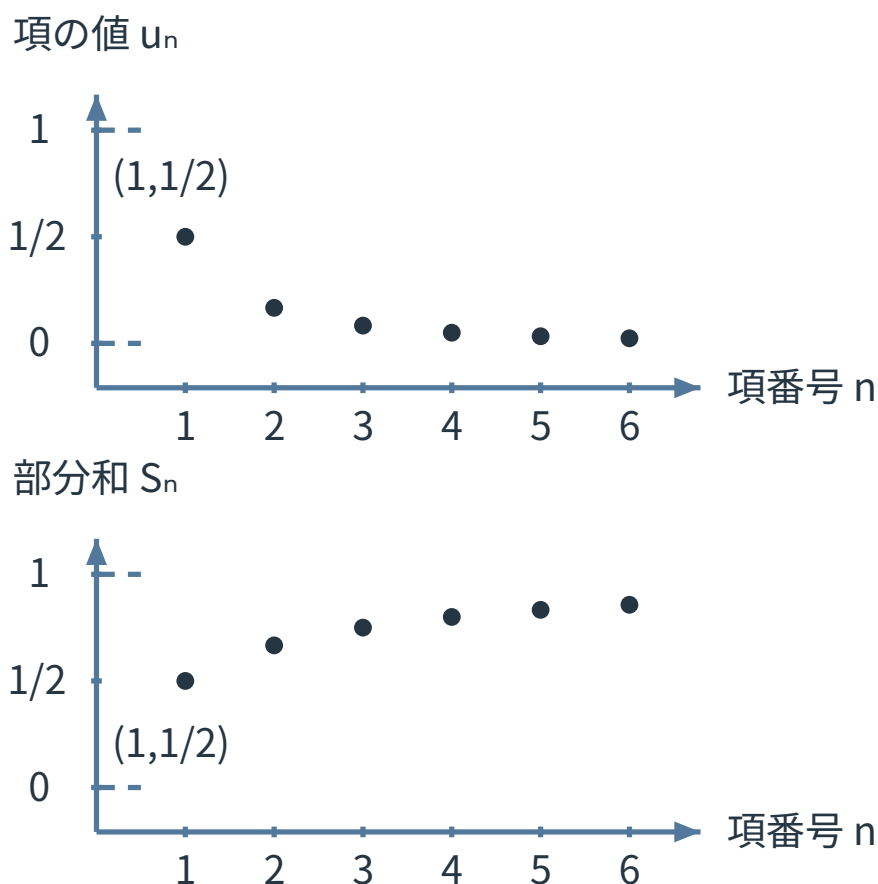


図1 上段は項の値 $u_n=1/[n(n+1)]$ 、下段は部分和 $S_n=n/(n+1)$ の初めの6点である。上下で項番号と値の尺度をそろえ、点は連結していない。項番号の目盛は各段の下部に置いた。各点の値は0より大きく1より小さい。全項の u_n が0へ、 S_n が1へ収束することは、この6点だけで証明せず本文の一般式から説明する。縦横の縮尺は異なる。

例題 2

級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k}$$

が収束するか調べよ。

例題 2 の解答・解説

各項を調べると、

$$\frac{k+1}{k} = 1 + \frac{1}{k}$$

である。
したがって、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{k} = 1$$

となる。
級数が収束するならば、項の極限は 0 でなければならない。しかし、この級数では項の極限が 1 であり、必要条件を満たさない。
したがって、この級数は発散する。
さらに、すべての k で

$$\frac{k+1}{k} \geq 1$$

であるから、

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{k} \geq n$$

となる。
任意の $M > 0$ に対し、正整数 $N > M$ を選ぶと、全ての $n \geq N$ で

$$S_n \geq n \geq N > M$$

となる。
したがって、部分和は正の無限大へ発散し、有限値へ収束しない。

例題 3

調和級数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

が発散することを示す。
 j, m は正整数とする。

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

とおく。
次の順に考えよ。
(1) 項 $\frac{1}{n}$ の極限を求めよ。
(2) 第 j 群を、 $k = 2^{j-1} + 1$ から $k = 2^j$ までの項の和とする。この群の項数と下界を求めよ。
(3) H_{2^m} の下界を求め、級数が発散することを示せ。

例題 3 の解答・解説

(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

である。

したがって、項の極限だけを見ると収束しそうに見える。しかし、これは必要条件であり、十分条件ではない。

(2) 先頭の項1を除き、第 j 群を

$$G_j = \sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j} \frac{1}{k}$$

とする。

第 j 群には、 $2^j - (2^{j-1} + 1) + 1 = 2^{j-1}$

個の項がある。

また、第 j 群の各項では、

$$\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2^j}$$

である。

したがって、

$$G_j \geq 2^{j-1} \times \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2}$$

となる。

(3)

H_{2^m} では、先頭の項1の後に $j = 1$ から $j = m$ までの m 群がある。

したがって、

$$H_{2^m} = 1 + \sum_{j=1}^m G_j$$

であり、

$$H_{2^m} \geq 1 + \frac{m}{2}$$

となる。

任意の $M > 0$ に対し、正整数 $m > 2(M - 1)$ を選ぶと、 $1 + \frac{m}{2} > M$ である。

さらに、正の項を足していくため H_n は増加する。したがって、すべての $n \geq 2^m$ で、

$$H_n \geq H_{2^m} > M$$

となる。

よって、部分和は正の無限大へ発散し、調和級数は発散する。

$\frac{1}{n} \rightarrow 0$ は収束の必要条件にすぎず、有限部分和の中で群分けを行ったことに注意する。この議論は無限個の項の並べ替えではない。

演習問題

練習問題 1

次の級数の収束・発散を調べ、収束する場合は和を求めよ。

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k(k+1)}$$

練習問題 2

次の級数の収束・発散を調べ、収束する場合は和を求めよ。

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

練習問題 3

次の級数の収束・発散を調べ、収束する場合は和を求めよ。

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^k - \left(\frac{1}{3} \right)^k \right\}$$

ただし、無限和の公式を直接用いるのではなく、有限部分和を考えて求めよ。

練習問題 4

次の級数について、収束・発散を調べよ。

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}$$

また、「各項がすべて 1 未満だから有限な和になる」という考えが誤りである理由を説明せよ。

練習問題 5

次の級数について、収束・発散を調べよ。

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$$

項の極限による判断と、部分和の変化の両方から説明せよ。

練習問題 6

ある級数の有限部分和を S_n とする。

全ての正整数 n について、 $S_n = 4 - \frac{2}{n+1}$ が成り立つとき、次の問いに答えよ。

- (1) この級数の和を求めよ。
- (2) 初項 u_1 を求めよ。
- (3) $n \geq 2$ における u_n を求めよ。

練習問題 7

次の主張について、正しいか誤りかを答え、その理由を説明せよ。

「 $u_n \rightarrow 0$ なら、その各項を順に足した級数は必ず収束する」

例題 3 で扱った調和級数を反例として用いてよい。

練習問題 8

数列 u_n を $u_1 = 4$ 、 $n \geq 2$ では $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ と定める。

次の級数の収束・発散を調べ、収束する場合は和を求めよ。

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

また、最初の1項を変えることと、項の極限・級数の和の関係を説明せよ。

練習問題 1 の解答・解説

部分分数分解すると、

$$\frac{3}{k(k+1)} = 3\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

である。

n 項までの有限部分和を S_n とすると、

$$\begin{aligned} S_n &= 3 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 3 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \end{aligned}$$

となる。

したがって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 3$$

である。

よって、この級数は収束し、和は3である。

練習問題 2 の解答・解説

部分分数分解すると、

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$

である。

有限部分和を S_n とすると、

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

となる。

ここでは下端が $k=1$ であるため、最初に残る値は $\frac{1}{2}$ であり、 $1 - \frac{1}{n+1}$ 型にはならない。
よって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2}$$

である。

したがって、この級数は収束し、和は $\frac{1}{2}$ である。

練習問題 3 の解答・解説

有限部分和を

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^k - \left(\frac{1}{3} \right)^k \right\}$$

とする。

それぞれ有限等比和を用いる。

まず、

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} \right)^k = 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

である。

また、

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3} \right)^k = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right)$$

である。

したがって、

$$\begin{aligned} S_n &= \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) - \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right) \\ &= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \right)^n + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^n \end{aligned}$$

となる。

ここで極限を取ると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2}$$

である。

よって、この級数は収束し、和は $\frac{1}{2}$ である。

無限和どうしを形式的に引き算したのではなく、有限部分和を求めてから極限を取っている。

練習問題 4 の解答・解説

各項を調べると、

$$\frac{k}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1}$$

である。

したがって、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k+1} = 1$$

となる。

級数が収束するためには項の極限が 0 でなければならないため、この級数は発散する。

また、各項は 1 未満であるが、それだけでは有限な和になるとはいえない。

実際、全ての正整数 k について、

$$\frac{k}{k+1} \geq \frac{1}{2}$$

である。

したがって、有限部分和 S_n は、

$$S_n \geq \frac{n}{2}$$

となり、 n を大きくすると無限に大きくなる。

よって、この級数は発散する。

練習問題 5 の解答・解説

各項について考えると、 $u_k = (-1)^k$ である。

偶数項は常に 1、奇数項は常に -1 であるため、 $(-1)^k$ は 0 へ収束しない。

したがって、級数が収束するための必要条件を満たさず、発散する。

さらに有限部分和を調べる。

奇数番目まで足した場合は、 $S_{2m-1} = -1$ となる。

偶数番目まで足した場合は、 $S_{2m} = 0$ となる。

つまり、部分和は -1 と 0 という異なる有限値を繰り返し、1 つの値へ近づかない。

よって、この級数は発散する。

練習問題 6 の解答・解説

(1) 級数の和は部分和 S_n の極限である。

したがって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 - \frac{2}{n+1} \right) = 4$$

である。

よって、級数の和は4である。

(2) 初項は S_1 で求める。

$u_1 = S_1 = 4 - \frac{2}{2} = 3$ である。

(3)

$n \geq 2$ では、 $u_n = S_n - S_{n-1}$ を使う。

したがって、

$$\begin{aligned} u_n &= \left(4 - \frac{2}{n+1} \right) - \left(4 - \frac{2}{n} \right) \\ &= \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \end{aligned}$$

となる。

この式は $n \geq 2$ で導いたものであり、 $n = 1$ へそのまま代入してはいけない。

初項は別に $u_1 = S_1$ として求める必要がある。

練習問題 7 の解答・解説

この主張は誤りである。

確かに、級数が収束するならば、 $u_n \rightarrow 0$

は必要である。

しかし、これは十分条件ではない。

反例として調和級数を考える。

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

では、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

である。

しかし、有限部分和

H_{2m} について、例題 3 で示した群分けを使うと、

$$H_{2m} \geq 1 + \frac{m}{2}$$

となる。

m を大きくすれば右辺はいくらでも大きくなるため、部分和は有限値へ収束しない。

したがって、 $u_n \rightarrow 0$ だけでは級数の収束は判断できない。

練習問題 8 の解答・解説

初項を含めて有限部分和を考える。

$n = 1$ では、 $S_1 = u_1 = 4$ である。

$n \geq 2$ では、

$$\begin{aligned} S_n &= 4 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k+1)} \\ &= 4 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 4 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

となる。

したがって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{9}{2}$$

である。

よって、この級数は収束し、和は $\frac{9}{2}$ である。

また、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

は、最初の 1 項を変えても変化しない。

しかし、有限部分和にはその 1 項の差が常に残るため、級数の和は変化する。

項の極限だけでは、級数全体の和は決まらない。