

第 101 講 図形の条件を方程式へ変える

学習目標

- ・動く点を $P(x, y)$ と置き、図形の条件を座標を使った式へ翻訳できる。
- ・固定距離や等距離の条件から、点 P が満たす方程式を導ける。
- ・距離式を二乗するとき、変形の前後で条件が同じであることを確認できる。
- ・2 つの図形条件を 2 つの方程式に変え、両方を満たす交点を求められる。

図形の条件を、座標の条件へ翻訳する

前講では、2 つの不等式を同時に満たす点を共通部分として考えた。本講では、不等式ではなく等式を満たす点へ目を向ける。

たとえば「ある点から一定の距離にある」「2 点からの距離が等しい」「円上にあり、さらに直線上にもある」という図形の条件は、座標を使えば方程式として表せる。

大切なのは、完成した方程式を覚えることではない。条件文を読んだときに、どの点を $P(x, y)$ と置き、どの長さや位置関係を式にするかを判断することである。

条件文から方程式を作る 5 つの視点

図形の条件を方程式へ変えるときは、次の順に考える。

1. 動く点を $P(x, y)$ と置く。
2. 固定されている点や図形の座標を確認する。
3. 条件文に出てくる距離や位置関係を式で表す。
4. 条件を変えない変形だけを使って方程式を簡単にする。
5. 得られた方程式から元の条件へ戻れることを確認する。

最後の確認が重要である。元の条件から方程式を導けても、その方程式を満たす点がすべて元の条件を満たすとは限らない変形もあるからである。

固定された点から一定の距離にある条件

点 $P(x, y)$ が固定点 $C(1, -1)$ から距離 2 にあるとする。

条件文の「 C から距離 2」を、そのまま $PC = 2$ と読むことが出発点である。2 点間の距離を座標で表すと、条件は $\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = 2$ となる。

左辺は距離なので 0 以上であり、右辺の 2 も 0 以上である。このため、両辺を二乗しても条件は変わらない。

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} &= 2 \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 &= 4\end{aligned}$$

逆に、 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$ を満たす点では、 $PC = \sqrt{4} = 2$ となる。したがって、この方程式を満たす点と、元の「 C から距離 2」を満たす点は同じである。

得られた方程式は、中心 $C(1, -1)$ 、半径 2 の円を表す。

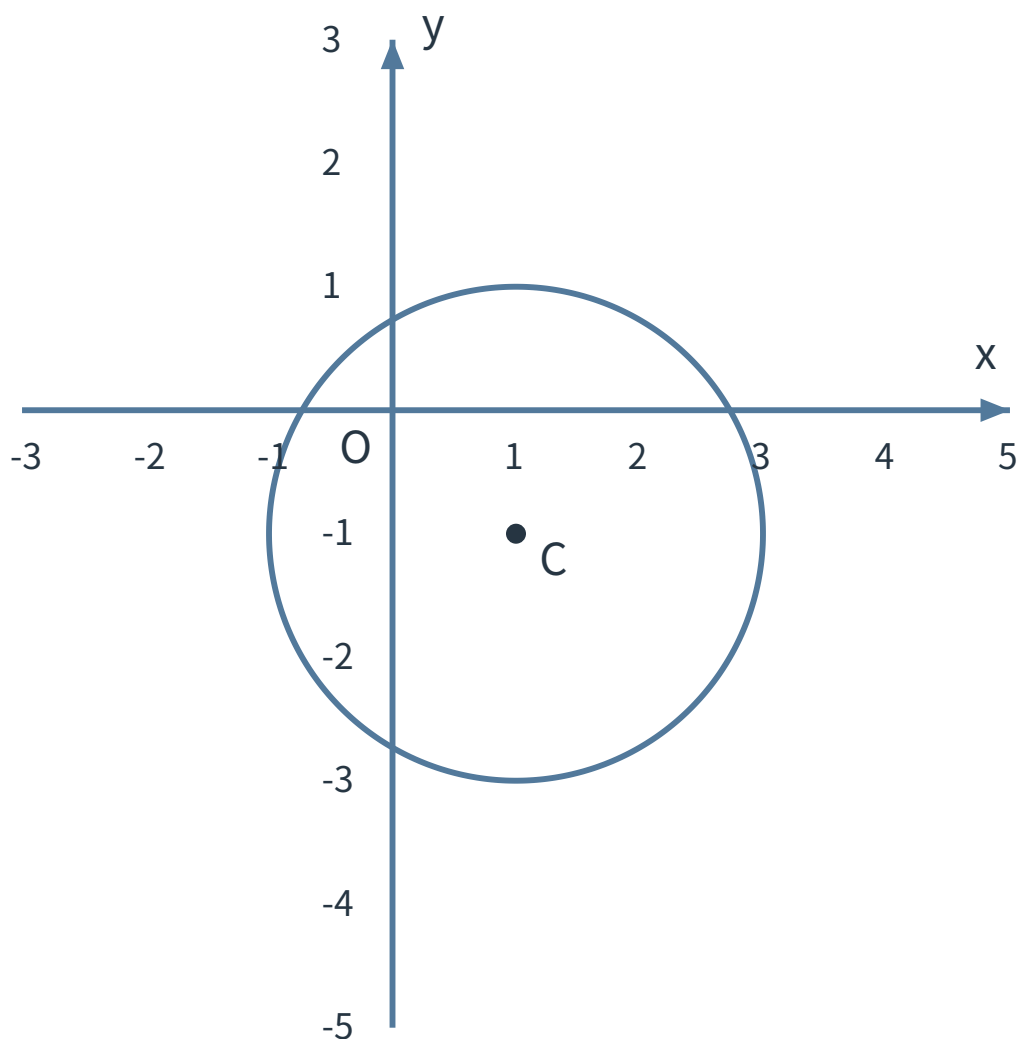


図1 固定点 $C(1, -1)$ から距離 2 にある点の集まり

距離式を二乗するときの確認

距離は必ず 0 以上である。そのため、 $\sqrt{A} = r$ で $r \geq 0$ なら、 $A = r^2$ へ二乗してよい。
 ただし、「二乗したから同値」と機械的に考えてはいけない。二乗すると符号の情報が消える場合があるため、両辺が非負であることを確認する必要がある。
 本講の距離の条件では、この非負性があるため、二乗前と二乗後の条件が同じになるのである。

2 点から等距離にある条件

点 $P(x, y)$ が、 $A(-2, 0)$ と $B(2, 0)$ から等しい距離にあるとする。
 条件文の「 A と B から等距離」を式にすると、 $PA = PB$ である。距離を座標で表せば、次の式になる。

$$\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

両辺はどちらも距離であり 0 以上なので、両辺を二乗しても条件は変わらない。

$$(x+2)^2 + y^2 = (x-2)^2 + y^2$$

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 - 4x + 4$$

$$8x = 0$$

$$x = 0$$

したがって、条件を満たす点 P は直線 $x = 0$ 上にある。

逆に $x = 0$ なら、 $PA^2 = PB^2$ となる。 PA と PB はともに 0 以上なので、 $PA = PB$ である。よって、 $x = 0$ を満たす点はすべて元の等距離条件を満たす。

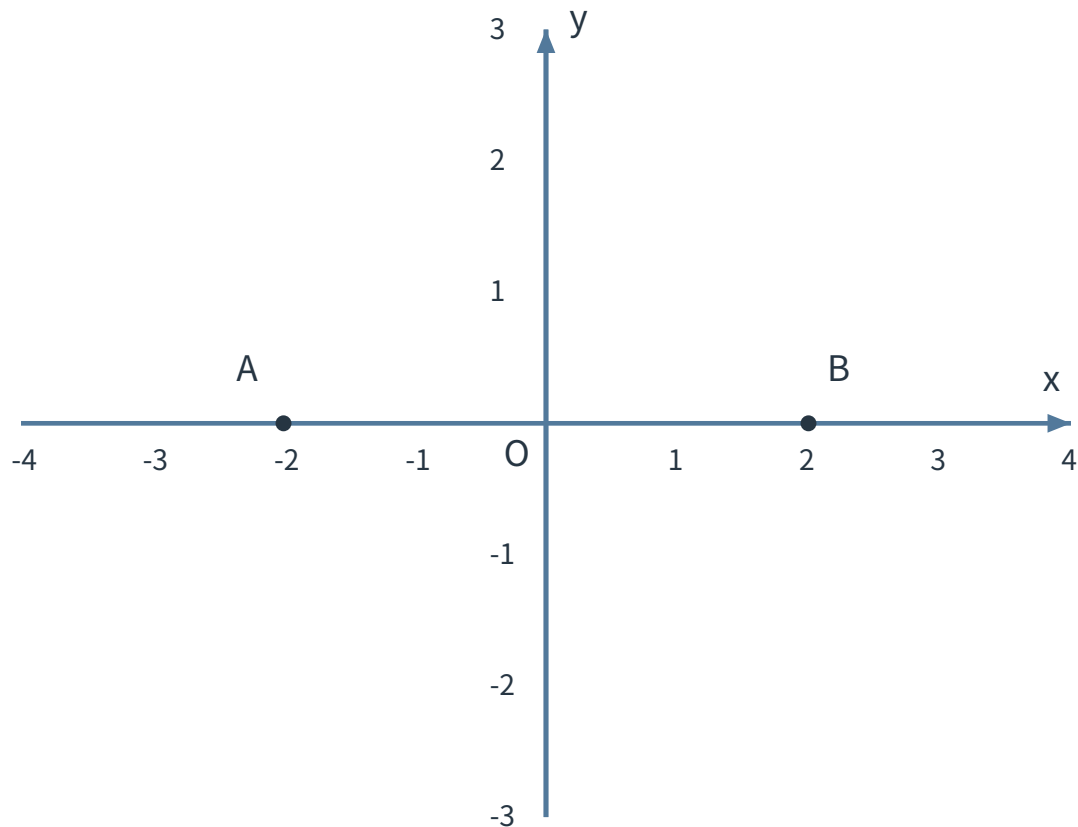


図2 $A(-2, 0)$ と $B(2, 0)$ から等距離にある点の集まりは直線 $x = 0$

直線 $x = 0$ は線分 AB の中点を通り、 AB に垂直である。つまり、計算から得られた直線は線分 AB の垂直二等分線である。

「等距離なら垂直二等分線」と覚えるだけでなく、 $PA = PB$ を距離の式へ変えることで、その直線が現れる理由を説明できることが重要である。

何を式にするかを条件文から読む

図形の条件と、最初にする式には対応がある。

- ・「点 C から距離 r 」なら $PC = r$ と置く。
- ・「点 A と点 B から等距離」なら $PA = PB$ と置く。
- ・「直線上にある」なら、その直線の方程式を満たす。
- ・「2つの図形上にある」なら、2つの方程式を両方満たす。

式変形より前に、条件文のどの部分を式へ翻訳するのかを決めることが判断の中心である。

2つの条件は、2つの方程式を同時に満たす

点 $P(x, y)$ が、原点を中心とする半径 2 の円上にあり、さらに y 軸上にもあるとする。

円上にある条件は $x^2 + y^2 = 4$ 、 y 軸上にある条件は $x = 0$ である。

ここでは、どちらか一方ではなく両方を同時に満たす点を求める。 $x = 0$ を円の方程式へ代入すると、

$$\begin{aligned} 0^2 + y^2 &= 4 \\ y^2 &= 4 \\ y &= 2, -2 \end{aligned}$$

したがって、候補となる点は $(0, 2)$ と $(0, -2)$ である。

$(0, 2)$ は $x^2 + y^2 = 4$ と $x = 0$ の両方を満たす。同様に、 $(0, -2)$ も両方を満たす。よって、この 2 点が円と y 軸の交点である。

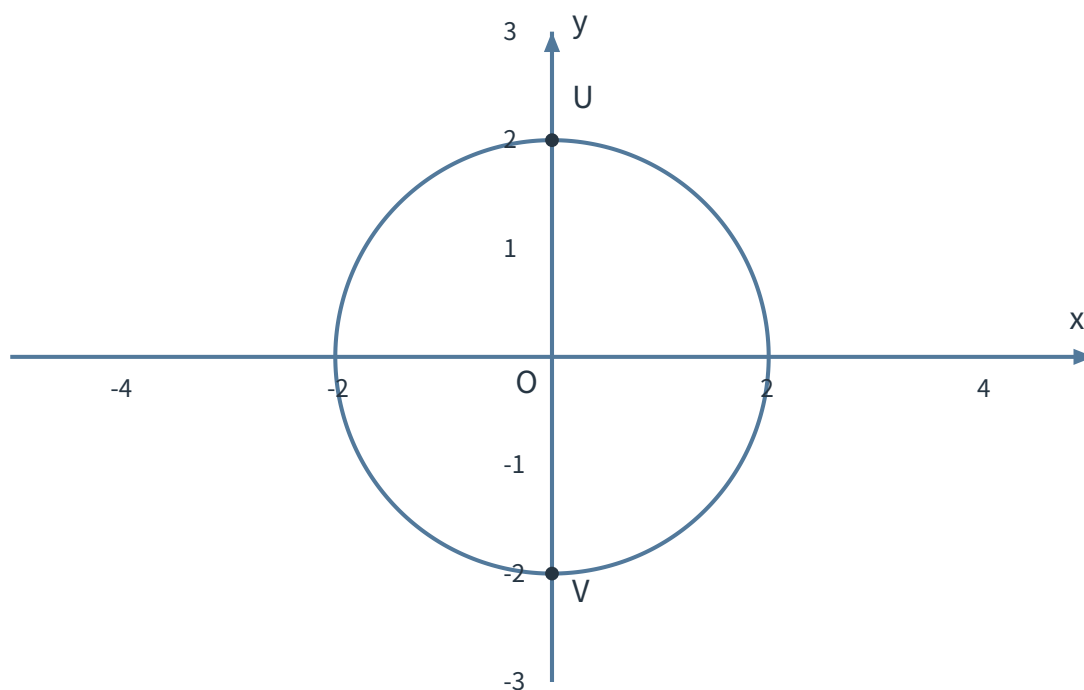


図3 円 $x^2 + y^2 = 4$ と直線 $x = 0$ の交点は $(0, 2)$ 、 $(0, -2)$

交点では逆確認まで行う

2つの図形の交点を求めるときは、2つの条件を方程式にして連立する。
計算で点が求まった後は、その座標を元の2つの方程式の両方へ代入する。両方を満たすことが確認できれば、その点は元の2条件を確かに満たしている。
1つの方程式だけを満たしていても、交点とは限らない。

例題**例題 1**

点 $P(x, y)$ が、点 $C(1, -1)$ から距離 2 にある。

- (1) 条件を距離の式で表せ。
- (2) 条件と同値な、平方根を含まない方程式を求めよ。
- (3) 得られた方程式が表す図形を答えよ。

例題 1 の解答・解説

- (1) 点 $P(x, y)$ と点 $C(1, -1)$ の距離は $\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}$ である。したがって、条件は $\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = 2$ である。
- (2) 両辺はともに 0 以上なので、両辺を二乗しても条件は変わらない。よって、 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$ である。
- 逆に、この方程式を満たせば $PC = \sqrt{4} = 2$ となるため、元の条件も満たす。
- (3) 得られた方程式は、中心が $C(1, -1)$ 、半径が 2 の円を表す。

例題 2

点 $P(x, y)$ が、2 点 $A(-2, 0)$ 、 $B(2, 0)$ から等しい距離にある。

- (1) 条件を距離の式で表せ。
- (2) 方程式を簡単にして、点 P が存在する直線の方程式を求めよ。
- (3) 得られた直線が元の条件を満たすことを逆向きにも確認せよ。

例題 2 の解答・解説

(1) 等距離という条件は $PA = PB$ である。したがって、

$$\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

と表せる。

(2) 両辺は距離なのでともに 0 以上である。よって、両辺を二乗してよい。

$$(x+2)^2 + y^2 = (x-2)^2 + y^2$$

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 - 4x + 4$$

$$8x = 0$$

したがって、求める直線は $x = 0$ である。

(3) $x = 0$ なら、

$$PA^2 = (0+2)^2 + y^2$$

$$= 4 + y^2,$$

$$PB^2 = (0-2)^2 + y^2$$

$$= 4 + y^2$$

となる。したがって $PA^2 = PB^2$ である。 PA と PB はともに 0 以上なので $PA = PB$ となり、元の等距離条件を満たす。

例題 3

点 $P(x, y)$ が、原点を中心とする半径 2 の円上にあり、さらに y 軸上にある。

(1) 2 つの条件をそれぞれ方程式で表せ。

(2) 2 つの条件をともに満たす点 P の座標をすべて求めよ。

(3) 求めた点が元の 2 条件をともに満たすことを確認せよ。

例題 3 の解答・解説

(1) 原点を中心とする半径 2 の円上にある条件は $x^2 + y^2 = 4$ である。 y 軸上にある条件は $x = 0$ である。

(2) $x = 0$ を円の方程式へ代入する。

$$y^2 = 4$$

$$y = 2, -2$$

したがって、点 P は $(0, 2)$ または $(0, -2)$ である。

(3) $(0, 2)$ では $0^2 + 2^2 = 4$ かつ $x = 0$ である。 $(0, -2)$ でも $0^2 + (-2)^2 = 4$ かつ $x = 0$ である。よって、どちらの点も元の 2 条件をともに満たす。

演習問題

演習問題 1

点 $P(x, y)$ が、点 $C(-2, 1)$ から距離 3 にある。点 P が満たす方程式を求めよ。また、その方程式が表す円の中心と半径を答えよ。

演習問題 2

方程式 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$ を満たす点 $P(x, y)$ について、点 P とある固定点との距離を使った条件文に直せ。

演習問題 3

点 $P(x, y)$ が、2 点 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ から等しい距離にある。点 P が満たす直線の方程式を求めよ。

演習問題 4

点 $P(x, y)$ が、2 点 $A(0, -2)$ 、 $B(0, 4)$ から等しい距離にある。点 P が満たす直線の方程式を求めよ。

演習問題 5

点 $P(x, y)$ が、原点を中心とする半径 5 の円上にあり、さらに直線 $y = 4$ 上にある。2 つの条件を方程式で表し、点 P の座標をすべて求めよ。最後に、求めた点が両方の方程式を満たすことを確認せよ。

演習問題 6

点 $P(x, y)$ が、2 点 $A(-2, 1)$ 、 $B(2, -1)$ から等しい距離にある。点 P が満たす直線の方程式を求めよ。

演習問題の解答・解説

演習問題 1 の解答・解説

点 $P(x, y)$ と点 $C(-2, 1)$ の距離が 3 なので、条件は $\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = 3$ である。両辺はともに 0 以上なので、二乗しても条件は変わらない。したがって、求める方程式は $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$ である。
逆に、この方程式を満たせば $PC = \sqrt{9} = 3$ となるため、元の条件も満たす。
よって、表す図形は中心 $(-2, 1)$ 、半径 3 の円である。

演習問題 2 の解答・解説

$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$ は、点 $P(x, y)$ と点 $C(1, -2)$ について $PC^2 = 16$ を表している。距離 PC は 0 以上なので $PC = 4$ である。
したがって、条件文は「点 P は固定点 $C(1, -2)$ から距離 4 にある」である。

演習問題 3 の解答・解説

等距離という条件から $PA = PB$ と置く。

両辺は距離なので 0 以上であり、二乗しても条件は変わらない。

$$(x+1)^2 + y^2 = (x-3)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 - 6x + 9$$

$$8x = 8$$

$$x = 1$$

したがって、求める直線の方程式は $x = 1$ である。

$x = 1$ を満たす点では $PA^2 = PB^2$ となり、両距離は非負なので $PA = PB$ である。よって、元の条件とも一致する。

演習問題 4 の解答・解説

等距離という条件から $PA = PB$ と置く。

距離を二乗した式を比べると、

$$x^2 + (y+2)^2 = x^2 + (y-4)^2$$

$$y^2 + 4y + 4 = y^2 - 8y + 16$$

$$12y = 12$$

$$y = 1$$

となる。

したがって、求める直線の方程式は $y = 1$ である。

この直線は $A(0, -2)$ と $B(0, 4)$ の中点 $(0, 1)$ を通り、線分 AB に垂直であるため、図形的にも線分 AB の垂直二等分線になっている。

演習問題 5 の解答・解説

原点を中心とする半径 5 の円上にある条件は $x^2 + y^2 = 25$ である。もう 1 つの条件は $y = 4$ である。

$y = 4$ を円の方程式へ代入すると、

$$x^2 + 4^2 = 25$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3, -3$$

となる。

したがって、点 P は $(3, 4)$ または $(-3, 4)$ である。

$(3, 4)$ では $3^2 + 4^2 = 25$ かつ $y = 4$ である。 $(-3, 4)$ でも $(-3)^2 + 4^2 = 25$ かつ $y = 4$ である。

よって、2 点はどちらも元の 2 条件を満たす。

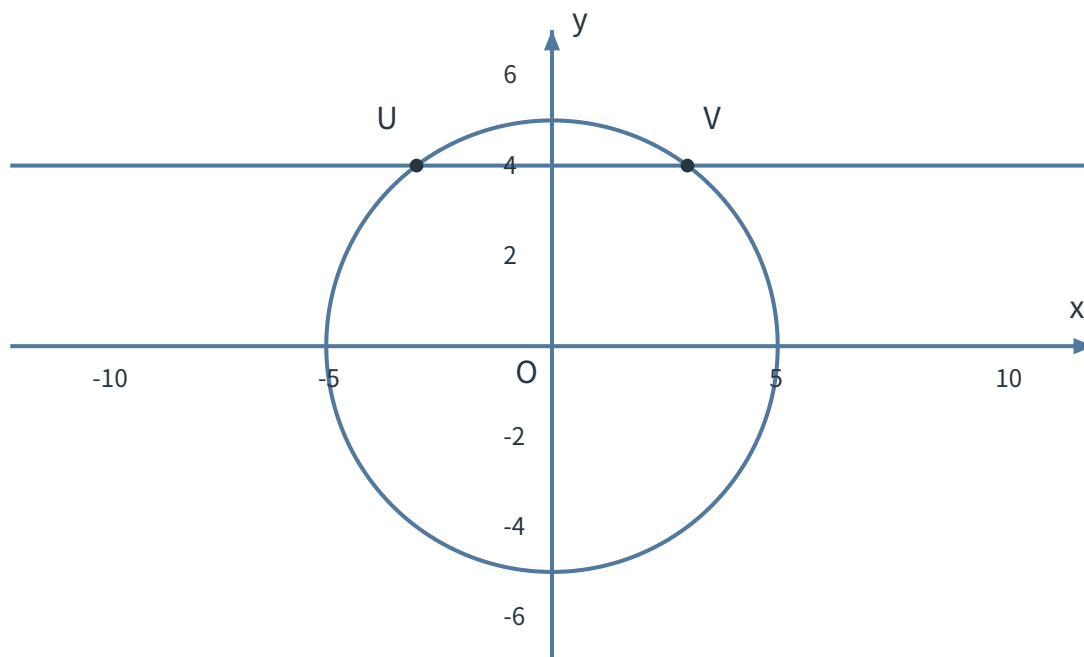


図4 円と直線 $y=4$ の交点は $(-3,4)$ と $(3,4)$

演習問題 6 の解答・解説

等距離という条件から $PA = PB$ と置く。

両辺は距離なので 0 以上であり、二乗しても条件は変わらない。

距離の二乗はそれぞれ $PA^2 = (x+2)^2 + (y-1)^2$ と $PB^2 = (x-2)^2 + (y+1)^2$ である。両式を展開し、共通する $x^2 + y^2 + 5$ を消すと $8x - 4y = 0$ となる。よって $y = 2x$ である。

したがって、求める直線の方程式は $y = 2x$ である。

この直線を満たす点では $PA^2 = PB^2$ となる。 PA と PB はともに 0 以上なので $PA = PB$ であり、元の条件へ逆向きにも戻れる。

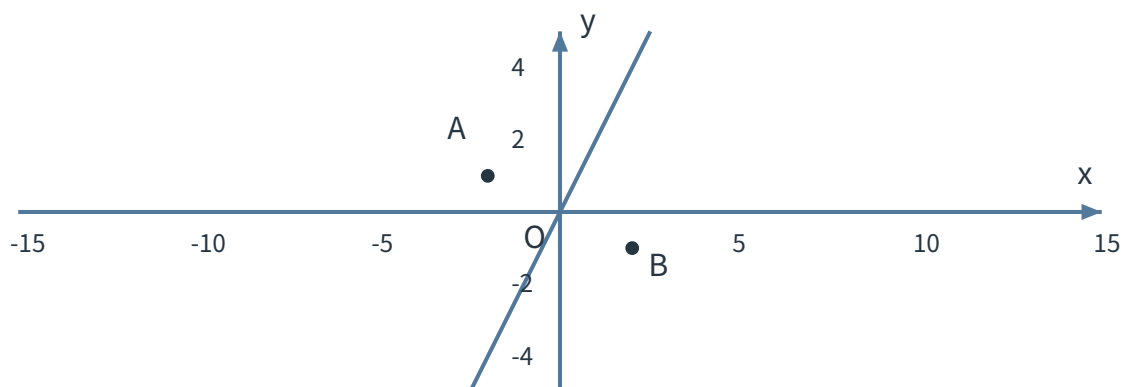


図5 $A(-2,1)$ と $B(2,-1)$ から等距離の直線 $y=2x$