

第 165 講 現実の問題を数式で表す

学習目標

現実の場面にある数量関係を読み取り、変数・単位・範囲・仮定を明確にした数式へ表せるようになる。

文章中の数量について、固定されている量と変化する量を区別し、係数や定数項が何を表すか説明できるようになる。

式が表している条件の範囲内で、その式を利用することの意味を理解できるようになる。

数量関係を式に翻訳する考え方

本講で扱う料金・制度・速度などの条件は、すべて教材用に設定した架空の条件である。実際の制度や料金体系を説明するものではない。

現実の数量を式で表すときは、文章中の数量が式の中でどの役割を持つかを判断する必要がある。例えば料金では、「最初に 1 回だけ加わる固定量」と「1 単位ごとに繰り返し加わる一定量」を区別する。

基本料金 300 円は利用時間が変わっても 1 回だけ必要なので、定数項になる。一方、1 時間あたり 200 円は一定の単価であるが、利用時間ごとに繰り返される量なので、時間を表す変数に掛ける係数になる。

このように、単に「一定だから定数項」と考えてはいけない。式の中で、その量がどのように使われるかを見ることが重要である。

また、数量関係の表し方は条件によって変わる。

等しいことを表す条件では等式を使う。例えば「料金は 2000 円になる」は等式で表す。

一方、「2000 円以内」「5 個以上」のように範囲を表す条件では不等式を使う。

本講では、一定の増加量や固定量を組み合わせた基本的な数量関係を中心に扱う。現実のすべての量が必ず固定量と比例する量の組合せになるわけではない。

変数・単位・範囲・仮定

現実の数量を式で表すときは、変数・単位・範囲・仮定を明確にする。

項目	確認する内容
変数	未知または変化する数量を表す文字
単位	その数値をどの単位で測ったものか
範囲	変数が取り得る値
仮定	式が成立する条件

変数は、現実の数量を表すために使う文字である。本講では、文字は指定した単位で測った数値を表すことにする。

例えば、 t を時間単位で測った数値と決めた場合、 $t = 2.5$ は 2.5 時間を表す。これは 2 時間 30 分と同じ長さである。

このように、式を作るときは文字が何を表し、どの単位で測った数値なのかを明確にすることが重要である。

また、数量によって取り得る範囲の種類が変わる。

人数や個数のように数えるものは、非負整数にすることが多い。時間や距離のように連続的に変化するものは、非負実数にすることが多い。速さや単価などでは正の実数として扱う場合もある。

式を作る前に、何を表す文字なのか、その値がどの範囲にあるのかを決めることが重要である。

式の各部分を見る視点

式を見るときは、各項が現実のどの数量に対応しているかを確認する。

例えば、架空の機器利用契約で、申込み時に基本料金 300 円、利用時間 1 時間あたり 200 円が追加されるとする。

ここで、利用時間の数値を t 、総料金の数値を y とすると、 t は時間で測った数値、 y は円で測った数値である。

基本料金 300 円は、利用時間が 0 でも発生する 1 回だけの料金なので、定数項になる。

一方、毎時 200 円は一定の単価であるが、利用時間に応じて何回分も加わる量である。そのため、利用時間 t に掛けて $200t$ と表す。

したがって、この設定では $y = 300 + 200t$ となる。

このように、式を作るときは数値が「固定されているか」だけではなく、「1 回だけ加わるのか」「変化する量に対応して繰り返されるのか」を判断することが必要である。

ただし、すべての現実の数量関係がこの形になるわけではない。この設定の条件の中で成り立つ式として考える。

数式化するときの注意

現実の条件を勝手に追加してはいけない。

例えば、料金の計算で「実際の支払いでは端数を切り捨てる」といった制度を想定すると、問題文にない条件を加えることになる。

教材中のモデルでは、指定された条件だけを使い、式が表す範囲内で考える。

例題 1

架空の機器利用契約を考える。

申込み時に基本料金 300 円が必ずかかり、利用時間 1 時間あたり 200 円を利用時間に比例して加える。基本料金 300 円と利用時間に比例する追加料金 $200t$ 円以外の料金はなく、切り上げも行わないものとする。円未満が出る場合も丸めない理想的な数値モデルとして扱う。

申込みは完了しており、利用時間が 0 時間の場合も基本料金 300 円がかかる。

利用時間の数値 t は、 $0 \leq t \leq 5$ の実数とする。

利用時間を時間単位で測った数値を t 、総料金を円単位で測った数値を y とする。

(1) y を t の式で表し、 t の範囲を示せ。

(2) 利用時間が 2.5 時間のときの料金を求めよ。

例題 1 の解答・解説

(1) 料金は「必ずかかる部分」と「利用時間によって増える部分」に分ける。

基本料金 300 円は、利用時間が変化しても必ず必要である。そのため、 t に掛けず定数項になる。

利用時間 1 時間あたり 200 円の追加料金は、利用時間 t に比例するため $200t$ となる。

したがって、 $y = 300 + 200t$ である。

また、利用時間は 0 時間以上 5 時間以下なので、 $0 \leq t \leq 5$ である。

(2) $t = 2.5$ を式へ代入する。

$$\begin{aligned} y &= 300 + 200 \times 2.5 \\ &= 300 + 500 \\ &= 800 \end{aligned}$$

したがって、料金は 800 円である。

この問題で重要なのは、300 円を t に掛けないことである。300 円は利用時間が 0 でも発生する固定された量だからである。一方、200 円は 1 時間増えるごとに追加される量なので、利用時間に比例させる。

例題 2

架空の行事を開催する。

開催すると参加人数にかかわらず固定費 2000 円が必要であり、参加者 1 人あたり材料費 150 円がかかる。参加者 1 人あたりの参加費は 250 円である。

この行事は開催することが決まっており、参加者が 0 人の場合でも固定費 2000 円が発生する。

参加人数を n とし、 n は 0 以上 30 以下の整数とする。

費用を円単位の数値 C 、収入を円単位の数値 R で表す。

その他の費用や収入はないものとする。

(1) C と R を n の式で表せ。

(2) 収入が費用以上となる条件を不等式で表し、可能な人数を求めよ。

例題 2 の解答・解説

(1) 費用には、参加人数に関係なく必要な固定費 2000 円がある。

さらに、参加者 1 人につき 150 円増えるため、材料費は $150n$ となる。

したがって、 $C = 2000 + 150n$ である。

収入は参加者 1 人につき 250 円なので、 $R = 250n$ である。

(2) 収入が費用以上になる条件は、 $R \geq C$ である。

式を代入すると、 $250n \geq 2000 + 150n$ となる。

両辺から $150n$ を引くと、 $100n \geq 2000$ となる。

したがって、 $n \geq 20$ となる。

また、参加人数は 30 人以下の整数であるため、 $20 \leq n \leq 30$ である。

したがって、可能な参加人数は 20 人から 30 人までの整数である。

この問題では、 $n = 0$ の場合でも固定費 2000 円が発生する点が重要である。人数によって変わる部分と、人数が 0 でも残る部分を分けることで式を作ることができる。

例題 3

架空の移動モデルを考える。

出発点から距離 x km の地点まで同じ道を往復する。往復とも一定の速さ毎時 4 km で進み、休憩や信号待ちはないものとする。

x は 0 以上の実数とし、往復時間を T 時間とする。

(1) T を x の式で表せ。

(2) 往復時間が 1.5 時間以内となる条件を不等式で表し、 x の可能な範囲を求めよ。

例題 3 の解答・解説

(1) 距離 x km は片道の距離である。

往復するため、進む距離は $2x$ km になる。

時間は「距離÷速さ」で求めるので、

$$T = \frac{2x}{4}$$

である。

整理すると、 $T = \frac{x}{2}$ となる。

(2) 往復時間が 1.5 時間以内なので、

$$\frac{x}{2} \leq 1.5$$

である。

両辺を 2 倍すると、 $x \leq 3$ となる。

また、距離は 0 以上なので、 $0 \leq x \leq 3$ である。

したがって、可能な距離は 0 km 以上 3 km 以下である。

この問題では、片道の距離と往復の距離を区別することが重要である。また、今回の T は時間単位の数値として定めているため、速さの毎時 4 km と対応するように時間の単位をそろえて式を作る必要がある。

演習問題**練習問題 1**

架空の工作教室では、参加すると固定費として 500 円が必要であり、作る作品 1 個につき材料費 120 円がかかる。

参加の申込みは完了しており、作品を 0 個作る場合でも固定費 500 円が必要である。記載された費用以外は発生しないものとする。

作る作品の個数を n 個とし、 n は 0 以上の整数とする。

合計費用を円で測った数値を C とする。

(1) C を n の式で表せ。

(2) 作品を 8 個作るときの費用を求めよ。

練習問題 2

架空の水槽に、毎分 3L ずつ一定の割合で水が入る。

最初に入っている水の量は 20L であり、水槽の容量は 50L である。水を入れている間は流出や蒸発はなく、毎分 3L ずつ一定の割合で水が入る。満水ちょうどの状態は含むが、水があふれて失われた状態は扱わない。

水を入れる時間を t 分、水の量を L 単位で測った数値を V とする。 t は 0 以上の実数とする。

- (1) V を t の式で表せ。
- (2) 水があふれないための t の範囲を求めよ。

練習問題 3

架空の移動実験で、歩く間はずっと毎時 6km の一定の速さで歩く。休憩はないものとする。

歩く時間を時間単位で測った数値を t とし、 t は 0 以上の実数とする。進む距離を km 単位で測った数値を d とする。

- (1) d を t の式で表せ。
- (2) 45 分歩いたときの距離を求めよ。

練習問題 4

架空のイベントで、参加者に配る記念品を用意する。

記念品は 1 箱に 4 個ずつ入っている。購入は箱単位で行い、購入後は箱を開封して参加者 1 人につき 1 個ずつ渡す。

参加人数を n 人、購入する箱数を m 箱とする。 n と m はともに 0 以上の整数とする。

- (1) 不足しないために必要な条件を表せ。
- (2) 参加人数が 13 人のとき、必要な箱数を求めよ。

練習問題 5

架空の長方形の掲示板を作る。

横の長さを x m、縦の長さを 2m とする。横の長さ x は正の実数である。

掲示板の周囲の長さは 18m 以下にしたい。

周囲の長さを P m とする。

- (1) P を x の式で表せ。
- (2) 条件を満たす x の範囲を求めよ。

練習問題 6

架空の会場利用サービスを考える。

申込みは完了しており、利用時間が 0 時間の場合でも基本料金 800 円が必要である。利用 1 時間あたり 300 円が追加され、端数時間も正確に比例計算する。料金の丸めは行わない理想的な数値モデルとし、他の費用はないものとする。

利用時間を時間単位で測った数値 t 、料金を円単位で測った数値 y とする。 t は 0 以上の実数である。

(1) 料金が 2000 円以内となる条件を表す不等式を求めよ。

(2) 利用時間が 4 時間以上となる条件を表す不等式を求めよ。

ただし、(1)と(2)はそれぞれ別の条件を表す問いとして考える。

練習問題 7

架空のレンタルサービスの料金を考える。

申込みは完了しており、利用時間が 0 時間の場合でも基本料金 500 円が必要である。利用時間に応じて毎時 200 円を追加し、端数時間も正確に比例計算する。料金の丸めは行わない理想的な数値モデルとし、他の費用はないものとする。

利用時間を時間単位で測った数値 t 、料金を円単位で測った数値 y とする。 t は 0 以上の実数である。

ある人が「利用時間が増えるほど料金も増えるので、料金の式は $y = 500t$ である」と考えた。この考えが正しいか判断し、正しい式を示せ。

練習問題 8

架空のサービス利用について考える。

申込みは完了しており、利用回数を n 回とする。 n は非負整数である。 $n = 0$ の場合でも初期料金が必要であり、利用回数に応じて 1 回あたり一定の追加料金を n 回分加えるものとする。その他の費用はない。

料金を円単位で測った数値を y とする。

初期料金と 1 回あたりの一定の追加料金の金額は、どちらも示されていない。

この条件だけで、 y を n の式で一意に決められるか答えよ。

決められない場合は、異なる 2 つの追加条件を示し、それぞれの式を作れ。

練習問題 1 の解答・解説

(1) 費用は、固定費と作品数によって変化する材料費に分ける。

固定費 500 円は作品数が 0 個でも必要なので、そのまま定数項になる。

材料費は 1 個あたり 120 円で、作品数 n 個に比例するため $120n$ となる。

したがって、 $C = 500 + 120n$ である。

(2) $n = 8$ を代入する。

$$C = 500 + 120 \times 8 = 1460$$

したがって、費用は 1460 円である。

500 円は「1 個あたりの費用」ではなく、参加した時点で必ず必要な費用であるため n に掛けない。

練習問題 2 の解答・解説

(1) 最初の水量 20L は、水を入れる時間が 0 分でも存在する量なので定数項になる。

毎分 3L ずつ増えるため、時間 t 分後の増加量は $3t$ L である。

したがって、 $V = 20 + 3t$ である。

(2) 水槽の容量は 50L なので、水の量が 50L 以下である必要がある。

$$20 + 3t \leq 50$$

両辺から 20 を引くと、 $3t \leq 30$ となる。

したがって、 $t \leq 10$ である。

時間は 0 分以上なので、 $0 \leq t \leq 10$ となる。

容量という上限は「50L になる」という等式ではなく、「50L 以内」という不等式で表す点に注意する。

練習問題 3 の解答・解説

(1) 距離は「速さ $\times$ 時間」で表せる。

速さは毎時 6km で、時間は t 時間なので、 $d = 6t$ である。

(2) 45 分は時間単位では、 $45 \div 60 = 0.75$ 時間である。

したがって、 $d = 6 \times 0.75 = 4.5$ となる。

距離は 4.5km である。

変数 t を時間単位で定めているため、分のまま代入してはいけない。単位をそろえてから式を使う。

練習問題 4 の解答・解説

(1) 記念品は 1 箱 4 個入りであり、購入する箱数を m 箱とすると、用意できる個数は $4m$ 個になる。

不足しない条件は、用意できる個数が参加人数以上になることである。

したがって、 $4m \geq n$ である。

必要な箱数は、この条件を満たす非負整数 m のうち最小のものである。

(2) $n = 13$ のとき、

3 箱では $4 \times 3 = 12$ 個となり、13 人分に不足する。

4 箱では $4 \times 4 = 16$ 個となり、不足しない。

したがって、必要な箱数は 4 箱である。

また、 $n = 0$ の場合は記念品を用意する必要がないため、 $m = 0$ も条件を満たす。

この問題では、個数を扱うため n と m は整数で考える。小数の箱数を答えにしてはいけない。

練習問題 5 の解答・解説

(1) 長方形の周囲の長さは、横 2 辺と縦 2 辺の合計である。

横の長さは x m なので横 2 辺は $2x$ m、縦の長さは 2m なので縦 2 辺は 4m になる。

したがって、 $P = 2x + 4$ である。

(2) 周囲の長さは 18m 以下なので、 $2x + 4 \leq 18$ となる。

両辺から 4 を引くと、 $2x \leq 14$ となる。

よって、 $x \leq 7$ である。

また、掲示板の横の長さなので x は正の実数であり、 $x > 0$ である。

したがって、条件を満たす範囲は $0 < x \leq 7$ である。

「長さが 0m」という値は計算上は入れられても、掲示板としては成立しないため除く必要がある。

練習問題 6 の解答・解説

(1) 料金は基本料金 800 円と、利用時間による追加料金に分ける。

1 時間あたり 300 円なので追加料金は $300t$ となる。

したがって、 $y = 800 + 300t$ である。

2000 円以内という条件は、 $800 + 300t \leq 2000$ で表される。

(2) 4 時間以上利用する条件は、 $t \geq 4$ である。

「以内」は上限を表す不等式、「以上」は下限を表す不等式になる。

条件の言葉に対応する不等号を正しく選ぶことが重要である。

練習問題 7 の解答・解説

考えた式 $y = 500t$ が正しいか確認する。

この式では、利用時間が 0 時間なら料金も 0 円になる。

しかし、条件では利用開始時に基本料金 500 円が必要であるため、利用時間 0 でも料金は 500 円になる。

したがって、この式は条件と合わない。

正しい式は、 $y = 500 + 200t$ である。

500 円は一定の値であるが、200 円も 1 時間あたりで一定の値である。しかし、式の中での役割が異なる。

500 円は利用時間によらないため定数項になり、200 円は利用時間 1 時間ごとの増加量なので t に掛ける係数になる。

練習問題 8 の解答・解説

この情報だけでは、 y を n の式で一意に決めることはできない。

理由は、固定料金と 1 回あたりの追加料金が決まっていないためである。

例えば、追加条件として、

「最初の料金が 300 円、1 回あたり 100 円追加される」

と決めた場合、 $y = 300 + 100n$ となる。

一方、

「最初の料金が 800 円、1 回あたり 50 円追加される」

と決めた場合、 $y = 800 + 50n$ となる。

どちらも「最初に料金が必要で、利用回数に応じて追加料金が増える」という条件を満たしている。

したがって、元の情報だけでは式は一意に定まらず、追加条件が必要である。

現実の問題を式にするには、数量関係だけでなく、式を決めるために必要な条件がすべて与えられているか確認する必要がある。