第 194 講 法線

この講でできるようになること

- 曲線上の点における法線の意味を説明できる。
- 接線の傾きから法線の傾きを求め、法線の方程式を立てられる。
- 接線が水平になる場合に、法線が鉛直線になることを判断できる。
- 法線を求める前に、微分可能性と接点が条件を満たしているか確認できる。

接線と法線を考える理由

関数 $y=f(x)$ が a を含む開区間で定義され、a で微分可能であるとき、点 $(a, f(a))$ における接線を考えることができる。
法線は接点を通り接線に垂直な直線であり、接線との位置関係によって決まる。
接線の傾きを求めてから、垂直条件を利用して法線の向きを決める。
微分係数が存在しない点では、本講の公式をそのまま適用せず、接線の存在や向きを別途調べる必要がある。

法線の定義

関数 $y=f(x)$ が a を含む開区間で定義され、a で微分可能であるとする。点 $P(a, f(a))$ における接線の傾きは $f'(a)$ であり、その接線に垂直で点 P を通る直線を法線という。
$f'(a) \neq 0$ の場合、接線の傾きとの垂直条件から、法線の方程式は $y-f(a)=-\frac{x-a}{f'(a)}$ となる。
$f'(a)=0$ の場合は負の逆数を考えることができないため、法線は鉛直線 $x=a$ で表される。

負の逆数になる理由

接線と法線の傾きを考えるときは、傾きが存在する 2 直線の場合に限って考える必要がある。
接線の傾きを m とすると、その方向ベクトルは $(1, m)$ と表せる。この方向を 90 度回転すると、垂直な方向ベクトルは $(-m, 1)$ になる。
$m \neq 0$ のとき、このベクトルから法線の傾きは $\frac{1}{-m}=-\frac{1}{m}$ と求められる。つまり、法線の傾きは接線の傾きの負の逆数になる。
ただし、接線が水平な場合や法線が鉛直になる場合は、傾きの積が -1 という考え方をそのまま使えない。水平な接線では法線を $x=a$ の形で表す。

法線を求めるときの確認

法線の公式を使う前に、次を確認する。
- 接点が本当に曲線上にあるか。
- その点で微分係数が存在するか。
- 接線の傾きが 0 ではないか。

特に接線が水平な場合、傾きの負の逆数を考えると 0 で割ることになるため、その方法は使えない。

©ミライコーチング

放物線の接線と法線

曲線 $y = x^2$ 上の点 $(1, 1)$ を接点とする。接線は $y = 2x - 1$、法線は $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ である。図では接線を破線、法線を実線として区別し、接点で 2 直線が垂直に交わる関係を示す。

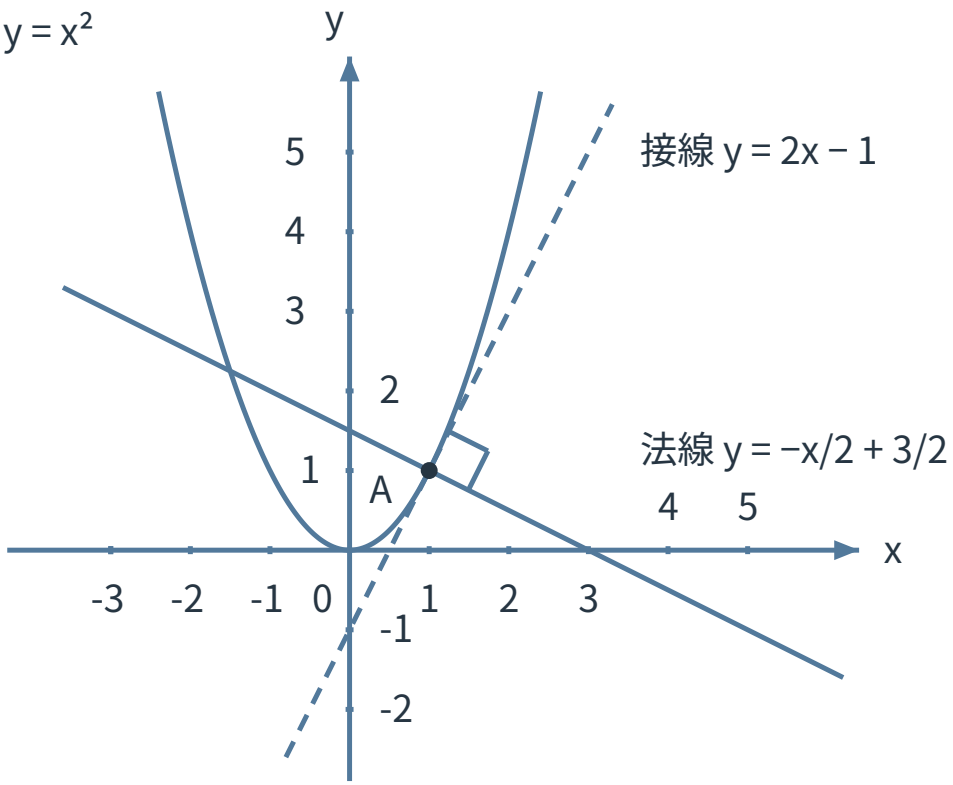

図 1　$y = x^2$ の点 $A(1, 1)$：接線（破線）と法線（実線）

水平接線と鉛直法線

曲線 $y = x^2$ 上の点 $(0, 0)$ を接点とする。接線は水平な直線 $y = 0$、法線は鉛直な直線 $x = 0$ である。水平接線では負の逆数を使わず、鉛直な法線として表すことを示す。

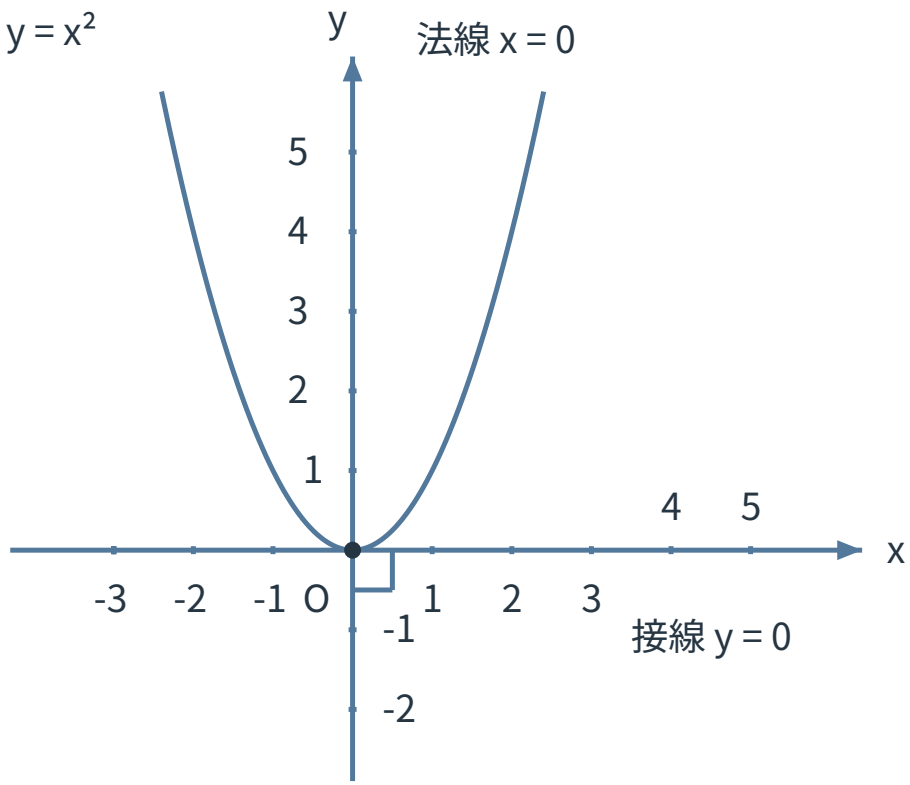

図 2　$y = x^2$ の原点：接線 $y = 0$ と法線 $x = 0$

三次曲線の接線と法線

曲線 $y = x^3$ 上の点 $(1, 1)$ を接点とする。接線は $y = 3x - 2$、法線は $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ である。図では接線を破線、法線を実線として区別し、傾きが負の逆数になる関係を示す。

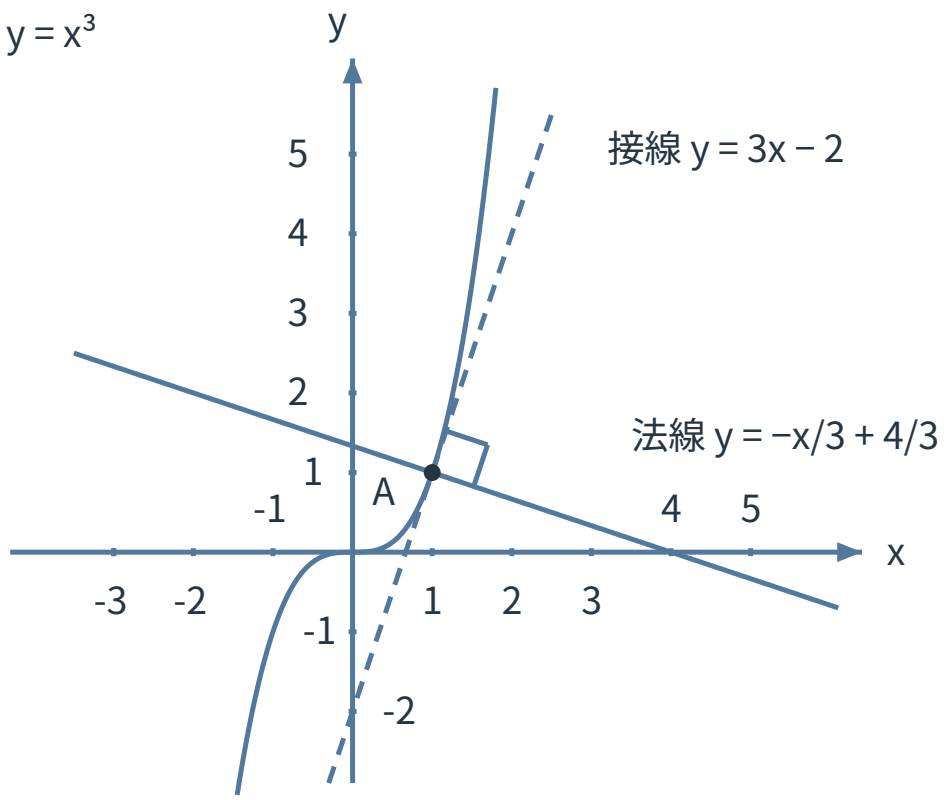

図 3　$y = x^3$ の点 $A(1, 1)$：接線（破線）と法線（実線）

接線から法線を求める流れ

接点を確認してから接線の傾きを求め、接線と垂直になる法線の傾きへ変換する流れを使う。接線と法線を取り違えず、垂直条件を利用することが目的である。

例題 1

曲線 $y = x^2$ 上の点 $(1, 1)$ における法線の方程式を求めなさい。

例題 1 の解答・解説

点 $(1,1)$ が曲線 $y=x^2$ 上にあることを確認する。
微分すると $y'=2x$ である。したがって、$x=1$ における接線の傾きは 2 となる。
法線の傾きは接線の傾きの負の逆数なので $-\frac{1}{2}$ である。法線は点 $(1,1)$ を通るから、点傾きの式より $y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$ となる。
整理すると法線の方程式は $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ である。
接線の傾き 2 と法線の傾き $-\frac{1}{2}$ の積は -1 になるため、求めた直線が接線と垂直であることを確認できる。

水平な接線の場合

接線が水平になる場合は、負の逆数を使わず、鉛直な直線として法線を表す。0 で割る形が出た場合は計算ミスではなく、別の考え方が必要な場面である。

例題 2

曲線 $y=x^2$ 上の点 $(0,0)$ における法線の方程式を求めなさい。

例題 2 の解答・解説

点 $(0,0)$ が曲線 $y=x^2$ 上にあることを確認する。
微分すると $y'=2x$ であり、$x=0$ では接線の傾きは 0 になる。
この場合、接線は水平な直線である。水平な直線に垂直な直線は鉛直線であるため、法線は傾きではなく x 座標で表す。
接点の x 座標は 0 なので、法線の方程式は $x=0$ である。
負の逆数を使おうとして $-\frac{1}{0}$ とするのは誤りであり、これは水平接線では別の考え方が必要であることを示している。

傾きの符号と逆数

法線の傾きを求めるときは、符号だけを変えないことが重要である。接線の傾きが 3 なら、法線の傾きは -3 ではなく $-\frac{1}{3}$ になる。

例題 3

曲線 $y=x^3$ 上の点 $(1,1)$ における法線の方程式を求めなさい。

例題 3 の解答・解説

点 $(1,1)$ が曲線 $y=x^3$ 上にあることを確認する。
微分すると $y'=3x^2$ である。$x=1$ では接線の傾きは 3 になる。
したがって、法線の傾きは負の逆数より $-\frac{1}{3}$ である。法線は点 $(1,1)$ を通るので、$y-1=-\frac{1}{3}(x-1)$ となる。
整理すると法線の方程式は $y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$ である。
接線の傾きが 3 のとき、符号だけを変えて -3 とする誤りに注意する。
実際、$3\times(-3)=-9$ である。
この積は -1 ではないため、垂直条件を満たさない。

演習問題 1

曲線 $y = x^2 + 2x$ 上の点 $(1, 3)$ における法線の方程式を求めなさい。

演習問題 2

曲線 $y = \sin x$ の $x = \frac{\pi}{3}$ に対応する点における法線の方程式を求めなさい。ただし、角の単位は弧度法とする。

演習問題 3

曲線 $y = e^x$ 上の点 $(0, 1)$ における法線の方程式を求めなさい。

演習問題 4

曲線 $y = \log_2 x$ の定義域を $x > 0$ とする。点 $(1, 0)$ における法線の方程式を求めなさい。

演習問題 5

曲線 $y = x^3 - 3x$ 上の点 $(1, -2)$ における法線を求めるとき、接線と法線の関係を説明しながら方程式を求めなさい。

演習問題 6

曲線 $y = \cos x$ 上で、接線が水平になる点を $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で全て求めなさい。その点における法線の方程式も求めなさい。ただし、角の単位は弧度法とする。

演習問題 7

曲線 $y = x^2$ 上の点で、法線の傾きが -1 になる点を全て求めなさい。

演習問題 8

曲線 $y = (\sin x)^2$ の $x = \frac{\pi}{4}$ に対応する点における法線の方程式を求めなさい。ただし、角の単位は弧度法とする。

演習問題 1 の解答・解説

点 $(1, 3)$ が曲線 $y = x^2 + 2x$ 上にあることを確認する。
微分すると $y' = 2x + 2$ である。$x = 1$ における接線の傾きは 4 となるため、法線の傾きは負の逆数である $-\frac{1}{4}$ になる。
法線は点 $(1, 3)$ を通るので、$y - 3 = -\frac{1}{4}(x - 1)$ となる。
整理すると、法線の方程式は $y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$ である。接線の傾き 4 と法線の傾き $-\frac{1}{4}$ の積は -1 であり、垂直条件を満たしている。

©ミライコーチング

演習問題 2 の解答・解説

関数 $y=\sin x$ は実数全体で定義されており、角度は弧度法で扱う。微分すると $y'=\cos x$ である。
$x=\frac{\pi}{3}$ では接線の傾きは $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ となる。したがって、法線の傾きは負の逆数である -2 である。
このときの接点は $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ であるから、法線は $y-\frac{\sqrt{3}}{2}=-2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ となる。
したがって、求める法線の方程式は $y-\frac{\sqrt{3}}{2}=-2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ である。
傾きの積は $\frac{1}{2}\times(-2)=-1$ であり、垂直関係も確認できる。

演習問題 3 の解答・解説

関数 $y=e^x$ は実数全体で定義され、微分すると $y'=e^x$ となる。
$x=0$ では接線の傾きは $e^0=1$ である。したがって、法線の傾きは負の逆数である -1 となる。
接点は $(0,1)$ なので、法線は $y-1=-(x-0)$ となる。
整理すると、法線の方程式は $y=-x+1$ である。指数関数でも、接線の傾きを求めてから垂直条件を利用する基本的な流れは変わらない。

演習問題 4 の解答・解説

対数関数 $y=\log_2 x$ は定義域 $x>0$ で考える。底の変換公式より、$\log_2 x=\frac{\log x}{\log 2}$ と表せる。ここで $\log$ は自然対数を表す。
したがって、導関数は $y'=\frac{1}{x\log 2}$ となる。$x=1$ では接線の傾きは $\frac{1}{\log 2}$ である。
法線の傾きは負の逆数なので、$-\log 2$ となる。接点は $(1,0)$ であるから、法線は $y=-(\log 2)(x-1)$ となる。
対数の底を確認せずに $\frac{1}{x}$ としてしまうと定数倍を誤るため、底 2 の影響を残して計算する必要がある。

演習問題 5 の解答・解説

曲線 $y=x^3-3x$ は実数全体で定義されており、点 $(1,-2)$ は曲線上の点である。
微分すると $y'=3x^2-3$ である。$x=1$ では接線の傾きは $3\times1^2-3=0$ となる。
したがって、接線は水平な直線である。水平な接線に垂直な法線は鉛直線になるため、傾きの負の逆数を使うことはできない。
接点の x 座標が 1 なので、法線の方程式は $x=1$ である。ここで $-\frac{1}{0}$ のような計算をするのは誤りであり、水平接線では鉛直法線として考える必要がある。

演習問題 6 の解答・解説

関数 $y=\cos x$ は実数全体で定義されている。条件 $0\le x\le 2\pi$ は接線が水平になる点を探す範囲であり、端点 0 と 2π でも二側微分可能である。
微分すると $y'=-\sin x$ である。
接線が水平になる条件は $-\sin x=0$ である。
指定範囲内の解は $x=0,\pi,2\pi$ である。
それぞれの点は $(0,1)$、$(\pi,-1)$、$(2\pi,1)$ である。いずれも接線の傾きは 0 なので、法線は鉛直線になる。
したがって、対応する法線の方程式は $x=0$、$x=\pi$、$x=2\pi$ である。水平接線では負の逆数を使わず、鉛直線として表すことが重要である。

演習問題 7 の解答・解説

曲線 $y = x^2$ 上の接点を (a, a^2) とおく。
接線の傾きは $y' = 2x$ より $2a$ である。法線の傾きが -1 になる条件から、$a \neq 0$ の場合は $-\frac{1}{2a} = -1$ となる。
この式を解くと $2a = 1$ なので、$a = \frac{1}{2}$ である。したがって接点は $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ となる。
また、$a = 0$ の場合は接線が水平になり、法線は鉛直線 $x = 0$ である。鉛直線の傾きは定義されないため、法線の傾きが -1 という条件を満たさない。

演習問題 8 の解答・解説

関数 $y = (\sin x)^2$ は実数全体で定義されている。合成関数の微分より、$y' = 2\sin x \cos x$ となる。
$x = \frac{\pi}{4}$ では、$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ である。
導関数へ代入すると、$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ となる。
接線の傾きは 1 なので、法線の傾きは -1 である。
接点の y 座標は $\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{1}{2}$ である。
したがって、接点は $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$ である。
法線の方程式は $y - \frac{1}{2} = -\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ となる。

©ミライコーチング