

第 60 講 組合せ

学習目標

- 異なる n 個から、順序を区別せずに r 個を選ぶ「組合せ」の意味を説明できる。
- 順列と組合せの違いを、順序を区別するかどうかで判断できる。
- $C_n^r = \frac{P_n^r}{r!}$ となる理由を説明できる。
- $C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ を使って基本的な組合せの数を求められる。

順番を変えても同じ選び方

組合せでは順序を区別しない

順列では、異なるものを選んで順に並べるので、順序が違えば別の場合として数えました。たとえば、 A, B, C, D の 4 個から 2 個を選んで順に並べるとき、

- AB
- BA

は別の順列です。

ところが、「4 個から 2 個を選ぶだけ」で、並べる順序を考えないなら、 A と B を選ぶことに変わりはありません。

この場合、

- A のあとに B を選ぶ
- B のあとに A を選ぶ

という違いは数え分けません。

順序を区別せずに選ぶ数え方が**組合せ**です。

組合せ

異なる n 個のものから、順序を区別せずに r 個を選ぶことを**組合せ**といいます。その組合せの総数を、

$$C_n^r$$

と表します。

順列との違い

順列と組合せの違いは、順序を区別するかどうかです。

数え方	順序	例
順列	区別する	1 番目、2 番目、3 番目を決める
組合せ	区別しない	何個かを選ぶだけ

同じものを選んでいて、順番だけが違う場合を別とするかどうかを最初に確認します。

順列から組合せを考える

まず順序をつけて数えてみる

異なる 5 個 A, B, C, D, E から 3 個を選ぶ組合せを考えます。いったん、3 個を選んで順に並べるとします。

その場合の数は、

$$P_5^3$$

です。

たとえば、 A, B, C の 3 個を選んだ 1 つの組について、順序まで区別すると、

- ABC
- ACB
- BAC
- BCA
- CAB
- CBA

の 6 通りがあります。

これは、

$$3! = 6$$

通りです。

しかし組合せでは、この 6 通りをすべて「 A, B, C を選んだ 1 通り」とみなします。

つまり、順列で数えると、1 つの組合せを 3! 回ずつ重複して数えています。

順列から順序の重複を取り除く

異なる n 個から r 個を順に並べる数は P_n^r です。

組合せでは、選んだ r 個の並べ替え $r!$ 通りを同じものとみなします。

したがって、

$$C_n^r = \frac{P_n^r}{r!}$$

となります。

r で割るのではなく r! で割る

r 個を選んだあと、その r 個の並べ方は r 通りではありません。

異なる r 個すべての並べ方は、

$$r!$$

通りです。

そのため、順列から組合せへ直すときは $r!$ で割ります。

組合せの公式

nPr を階乗で表して整理する

順列では、

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

と表せます。

組合せは、

$$C_n^r = \frac{P_n^r}{r!}$$

なので、

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

となります。

組合せの数

異なる n 個から、順序を区別せずに r 個を選ぶ組合せの数は、

$$C_n^r = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

です。

ここで $0! = 1$ とします。

公式の意味

式、

$$C_n^r = \frac{P_n^r}{r!}$$

では、

- P_n^r : 選んだ r 個の順序まで区別した数
- $r!$: 同じ r 個を並べ替える方法の数

を表しています。

順序だけが違うものをまとめるために $r!$ で割っています。

基本計算

5 個から 2 個を選ぶ

異なる 5 個から 2 個を選ぶ組合せは、

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!3!}$$

です。

階乗を必要なところまで展開すると、

$$C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

となります。

したがって、10 通りです。

6 個から 3 個を選ぶ

異なる 6 個から 3 個を選ぶ場合は、

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!3!}$$

です。

計算すると、

$$C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

です。

計算では全部の階乗を書き切らなくてよい

たとえば、

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!4!}$$

では、 $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!$ と考えると、

$$C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

と簡単にできます。

分子と分母で同じ階乗を打ち消してから計算すると安全です。

順列か組合せかを判断する

同じ 3 個を選んだときに順番で区別するか

異なる 6 冊の本から 3 冊を使う場面を比べます。

3 冊を左・中央・右に置く

置く位置が違えば別の場合です。

したがって、順序を区別する順列です。

3 冊を読む本として選ぶ

どの順番で選んだかは関係なく、選ばれた 3 冊が同じなら同じ場合です。

したがって、組合せです。

問題文に「選ぶ」と書いてあるだけで決めず、完成した結果で順序を区別するかを考えます。

判断手順

1. 異なる n 個から r 個を使うことを確認する。
2. 選んだ r 個の順番や位置を区別するか考える。
3. 順番を区別するなら順列を使う。
4. 順番を区別しないなら組合せを使う。

選ぶ順番ではなく完成した結果を見る

実際にものを選ぶときには、どうしても「1 個目、2 個目」という時間の順序があります。

しかし組合せでは、その選んだ順番は数え分けません。

最終的に選ばれたものが同じなら、同じ 1 通りです。

小さな場合を列挙して確かめる

4 個から 2 個を選ぶ

A, B, C, D の 4 個から 2 個を選びます。

順序を区別しないので、異なる組は、

- A, B
- A, C
- A, D
- B, C
- B, D
- C, D

の 6 通りです。

公式でも、

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

となり、列挙と一致します。

A, B と B, A を別々に数えないことがポイントです。

例題

例題 1

異なる 5 枚のカードから、順序を区別せずに 2 枚を選びます。
選び方は何通りありますか。

例題 1 の解答・解説

異なる 5 枚から 2 枚を選ぶだけなので、組合せです。
したがって、

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

より、10 通りです。

例題 2

異なる 7 冊の本から 3 冊を選びます。
選んだ順番は区別しないものとします。
選び方は何通りありますか。

例題 2 の解答・解説

順序を区別せず、7 冊から 3 冊を選ぶので、

$$C_7^3$$

を求めます。

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

したがって、35 通りです。

例題 3

異なる 6 個の記号から 3 個を選びます。

ある生徒は P_6^3 を計算しました。

この計算では数えすぎになる理由を説明し、正しい選び方の数を求めなさい。

例題 3 の解答・解説

P_6^3 は、選んだ 3 個の順序まで区別して数えています。

しかし、この問題では順序を区別しません。

同じ 3 個について、その並べ方 $3!$ 通りをすべて同じ組合せとして扱うので、

$$C_6^3 = \frac{P_6^3}{3!}$$

です。

したがって、

$$C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

より、20 通りです。

演習問題**練習問題 1**

C_6^2 を計算しなさい。

練習問題 2

C_7^3 を計算しなさい。

練習問題 3

C_8^4 を計算しなさい。

練習問題 4

異なる 4 文字 A, B, C, D から、順序を区別せずに 2 文字を選びます。

すべての選び方を列挙し、 C_4^2 の計算結果と一致することを確認しなさい。

練習問題 5

異なる 8 冊の小冊子から 3 冊を選びます。

選ぶ順番を区別しないとき、選び方は何通りありますか。

練習問題 6

異なる 6 個の札から 4 個を選びます。
選び方は何通りありますか。

練習問題 7

異なる 5 個のものから 3 個を使う次の場面について、順列と組合せのどちらを使うか答えなさい。

- (1) 3 個を選んで、左・中央・右の位置に 1 個ずつ置く。
- (2) 3 個を選ぶだけで、選んだ順番は区別しない。

練習問題 8

ある生徒は、異なる 7 個から 3 個を選ぶ組合せについて、

$$C_7^3 = \frac{P_7^3}{3}$$

としました。
この式の誤りを説明し、正しい値を求めなさい。

練習問題 9

異なる 5 個 A, B, C, D, E から 3 個を選びます。

A, B, C を選ぶ 1 つの組合せが、 P_5^3 の中では何通りの順列として数えられているか答えなさい。
また、そのことから C_5^3 を求めなさい。

演習問題の解答・解説**練習問題 1 の解答・解説**

6 個から順序を区別せず 2 個を選ぶので、

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$$

したがって、15 です。

練習問題 2 の解答・解説

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

したがって、35 です。

練習問題 3 の解答・解説

$$C_8^4 = \frac{8!}{4!4!}$$

分子の一方の 4! を打ち消すと、

$$C_8^4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$$

したがって、70 です。

練習問題 4 の解答・解説

すべての選び方は、

- A, B
- A, C
- A, D
- B, C
- B, D
- C, D

の 6 通りです。

公式でも、

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

となり、列挙と一致します。

練習問題 5 の解答・解説

異なる 8 冊から、順序を区別せず 3 冊を選ぶので、

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!5!}$$

です。

したがって、

$$C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

より、56 通りです。

練習問題 6 の解答・解説

6 個から順序を区別せず 4 個を選ぶので、

$$C_6^4 = \frac{6!}{4!2!}$$

です。

したがって、

$$C_6^4 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$$

より、15 通りです。

練習問題 7 の解答・解説

(1) は順列です。

同じ 3 個を選んでも、左・中央・右のどこに置くかが変われば別の場合になるため、順序を区別します。

(2) は組合せです。

選ばれた 3 個が同じなら、選んだ順番が違って同じ 1 通りとして扱います。

練習問題 8 の解答・解説

3 個を選んだあと、その 3 個の並べ方は 3 通りではなく、

$$3! = 6$$

通りあります。

したがって、 P_7^3 から組合せへ直すには $3!$ で割ります。

正しくは、

$$C_7^3 = \frac{P_7^3}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 35$$

です。

練習問題 9 の解答・解説

A, B, C の 3 個を順に並べる方法は、

$$3! = 6$$

通りです。

したがって、 P_5^3 の中では、 A, B, C を選ぶ同じ 1 つの組合せが 6 回数えられています。

よって、

$$C_5^3 = \frac{P_5^3}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 10$$

なので、10 通りです。