

第 51 講 円の接線と弦

学習目標

- ・ 接点に引いた半径と接線が垂直になることを使える。
- ・ 円の外部の 1 点から引いた 2 本の接線の長さが等しいことを使える。
- ・ 接弦定理で、接線と弦が作る角に対応する円周角を見分けられる。
- ・ 接点・弦・弧・円周角の対応を確認して、角度や長さを求められる。

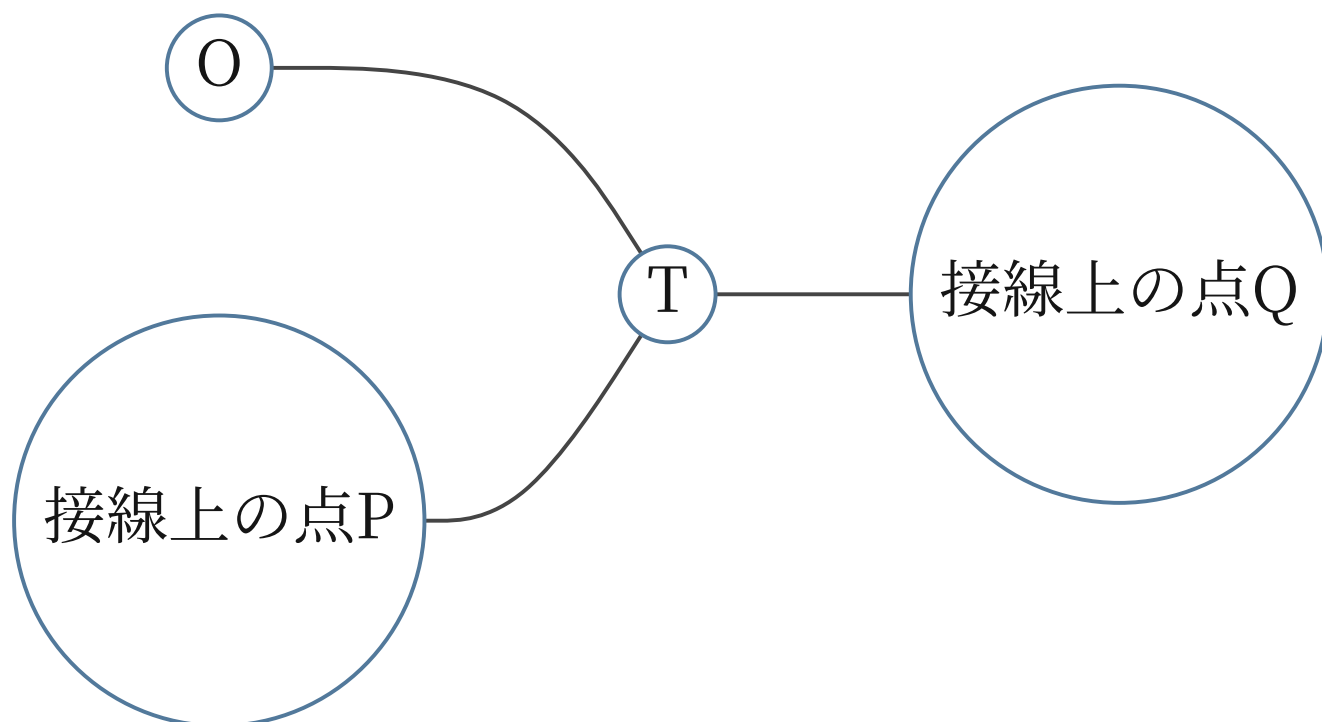
接線は円と 1 点だけを共有する

接線と接点

円とただ 1 点だけを共有する直線を、その円の**接線**といいます。
円と接線が共有する点を**接点**といいます。

接点へ引いた半径を見る

円の中心を O 、接点を T とします。
点 T で円に接する直線を考えると、半径 OT と接線は垂直になります。
つまり、接点を見つけたら、
中心と接点を結ぶ
ことが重要です。



半径と接線の垂直関係

円の中心を O 、接点を T とすると、半径 OT は点 T における接線に垂直です。
したがって、半径と接線が作る角は 90° です。

どの半径でも接線と垂直とは限らない

接線と垂直になるのは、その接点へ引いた半径です。
接点とは異なる円周上の点へ引いた半径を使わないようにします。

接線と半径から直角三角形ができる

接点に 90 度ができる

円の外部に点 P があり、 PT が点 T における接線であるとしします。
中心を O とすると、

$$OT \perp PT$$

なので、三角形 OPT は T を直角とする直角三角形です。
たとえば、 $OP = 13$ 、 $OT = 5$ なら、三平方の定理より、

$$PT^2 = 13^2 - 5^2$$

です。
したがって、

$$PT^2 = 144$$

となり、 $PT = 12$ です。

接線の長さを求める基本

外部の点 P 、中心 O 、接点 T が現れたら、
1. O と T を結ぶ。
2. $OT \perp PT$ を使う。
3. 必要なら直角三角形として長さを求める。
と考えます。

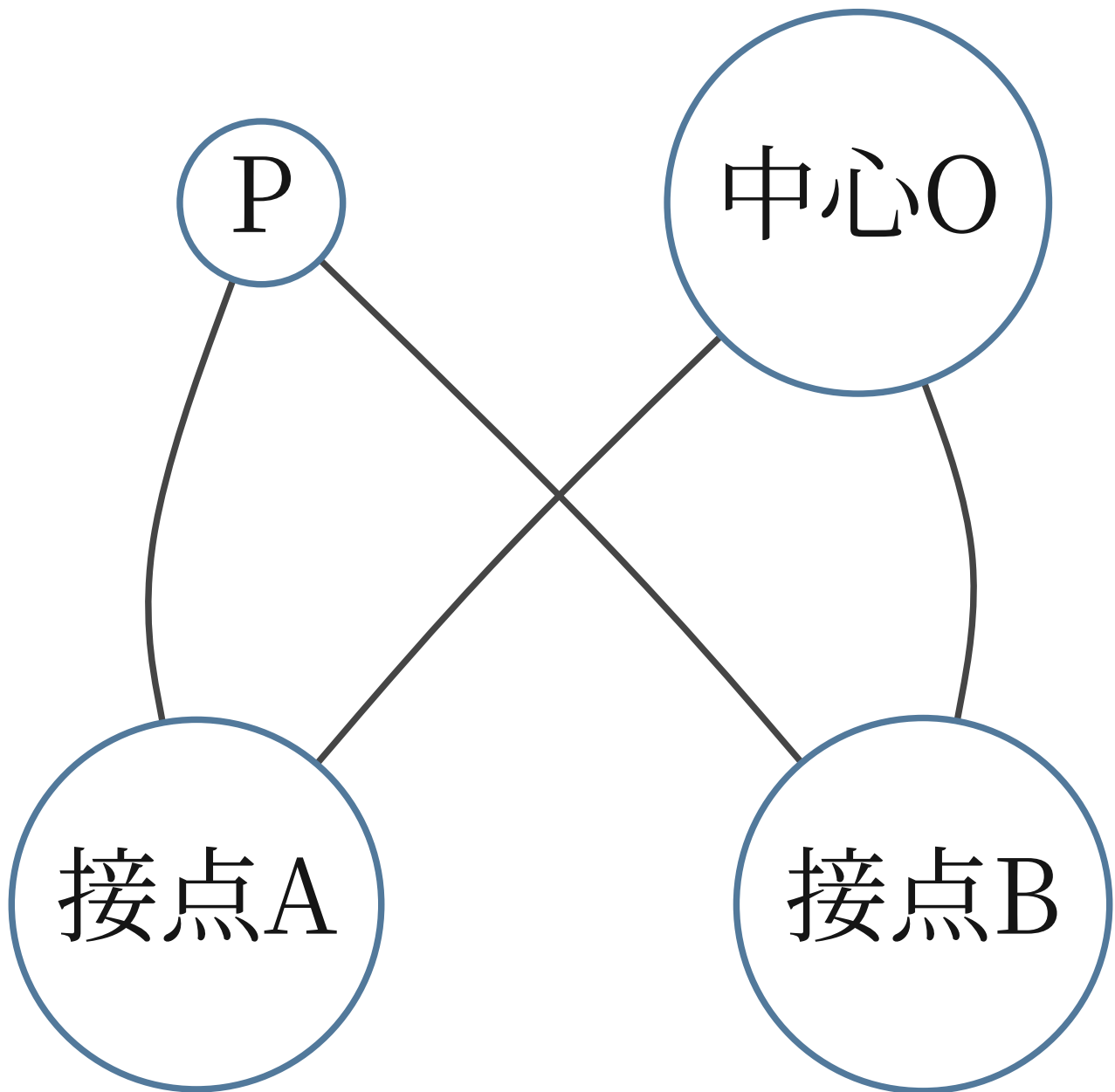
1 点から引いた 2 本の接線は等しい

外部の 1 点から 2 か所へ接する

円の外部の点 P から、円へ 2 本の接線を引きます。
接点をそれぞれ A, B とすると、

$$PA = PB$$

が成り立ちます。
つまり、同じ外部の点から円へ引いた 2 本の接線の長さは等しくなります。



なぜ 2 本の接線は等しいのか

A, B が接点なので、

$$OA \perp PA$$

かつ、

$$OB \perp PB$$

です。

また、OA と OB は同じ円の半径なので長さが等しく、OP は共通です。

したがって、直角三角形 OAP と OBP は合同になります。

そのため、

$$PA = PB$$

です。

同じ外部の点からの接線

点 P から円へ引いた 2 本の接線の接点が A, B なら、

$$PA = PB$$

です。

片方の接線の長さが分かれば、もう片方も同じ長さです。

弦の長ささと接線の長さを混同しない

$PA = PB$ が成り立つのは、 PA, PB がどちらも同じ外部の点 P から引いた接線だからです。

円周上の 2 点を結ぶ弦について、同じことが自動的に成り立つわけではありません。

接線と弦が作る角

接点から弦を引く

円周上の点 A で接線を引き、さらに点 A から円周上の別の点 B へ弦 AB を引きます。

このとき、接線と弦 AB が作る角には、円周角との特別な関係があります。

まず、どの弧に対応しているかを確認します。

弦の両端が A, B なので、見るべき弧は弧 AB です。

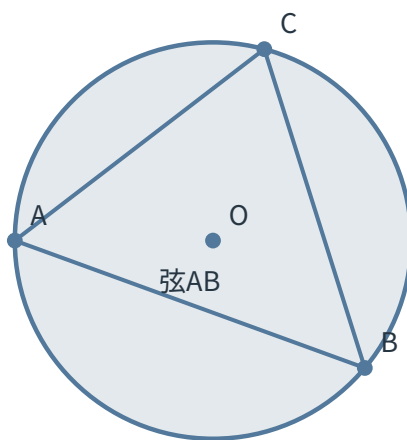


図3 弦 AB と弧 AB 、および弧 AB を見込む円周角 ACB

接弦定理

円の接点 A で引いた接線と弦 AB が作る角は、弦 AB が切り取る弧 AB に対する円周角に等しくなります。

弧 AB に対する円周角を $\angle ACB$ とすると、

接線と弦 AB が作る角 $= \angle ACB$

です。

これを**接弦定理**といいます。

接弦定理で対応する角を探す

接線と弦 AB が作る角を見たら、

1. 弦の両端 A, B を確認する。
2. 弧 AB を確認する。
3. 弧 AB を見込む円周角を探す。

という順で対応する角を決めます。

接点だけで角を決めない

接弦定理では、「接点が A だから $\angle A$ を探す」という考え方ではありません。
接線と一緒に角を作っている弦の両端を確認します。
弦が AB なら、対応するのは弧 AB に対する円周角です。

接弦定理で角度を求める

円周角から接線と弦の角へ

点 A で円に接する接線と弦 AB が作る角を x とします。
円周上の点 C について、 $\angle ACB = 52^\circ$ であるとします。
 $\angle ACB$ は弧 AB に対する円周角です。
接弦定理より、接線と弦 AB が作る角も同じ大きさなので、 $x = 52^\circ$ です。

角度問題の手順

接弦定理を使うときは、

1. 接点を確認する。
2. 接線と角を作っている弦を確認する。
3. その弦の両端を結ぶ弧を確認する。
4. 同じ弧を見込む円周角を探す。
5. 2つの角を等しいとする。

と進めます。

接線・弦・円周角を区別する

3つの基本関係

円の接線が現れる問題では、次の3つを区別します。

条件	使う性質
接点と中心を結んでいる	半径と接線は垂直
同じ外部の点から2本の接線を引いている	2本の接線の長さは等しい
接線と弦が角を作っている	接弦定理

まず図のどの部分について聞かれているかを確認してから、使う性質を選びます。

接線と弦があるだけでは接弦定理とは限らない

接弦定理を使う角は、接点を頂点として、接線と弦が作る角です。
接点ではない場所にある角を、そのまま接弦定理へ当てはめないようにします。

例題

例題 1

中心が O の円に、点 T で接する接線があります。
接線上の点を P とし、

$$\angle OPT = 35^\circ$$

とします。
 $\angle POT$ を求めなさい。

例題 1 の解答・解説

T は接点なので、半径 OT と接線 PT は垂直です。
したがって、

$$\angle OTP = 90^\circ$$

です。
三角形 OPT の内角の和より、

$$\angle POT = 180^\circ - 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$$

です。

例題 2

円の外部の点 P から円へ 2 本の接線 PA, PB を引きました。

$$PA = 11$$

のとき、 PB を求めなさい。

例題 2 の解答・解説

同じ外部の点 P から円へ引いた 2 本の接線の長さは等しいので、

$$PA = PB$$

です。
したがって、 $PB = 11$ です。

例題 3

円周上の点 A で接線を引き、弦 AB を引きます。
円周上の別の点 C について、

$$\angle ACB = 47^\circ$$

です。
点 A における接線と弦 AB が作る角を求めなさい。

例題 3 の解答・解説

$\angle ACB$ は弧 AB に対する円周角です。

接弦定理より、点 A における接線と弦 AB が作る角は $\angle ACB$ に等しくなります。

したがって、求める角は 47° です。

演習問題

練習問題 1

中心が O の円に、点 T で接線を引きます。

接線上の点を P とするとき、 $\angle OTP$ を求めなさい。

練習問題 2

中心が O の円に、点 T で接線 PT を引きました。

$$OP = 17, \quad OT = 8$$

のとき、 PT を求めなさい。

練習問題 3

円の外部の点 P から、円へ接線 PA, PB を引きました。

$$PA = 14$$

のとき、 PB を求めなさい。

練習問題 4

円の外部の点 P から、円へ接線 PA, PB を引きました。

$$PA = 2x + 3, \quad PB = 5x - 9$$

のとき、 x と 2 本の接線の長さを求めなさい。

練習問題 5

円周上の点 A で接線を引き、弦 AB を引きます。

円周上の点 C について、

$$\angle ACB = 38^\circ$$

です。

点 A における接線と弦 AB が作る角を求めなさい。

練習問題 6

円周上の点 A で接線を引き、弦 AB を引きます。

点 A における接線と弦 AB が作る角が 63° です。

円周上の点 C が弧 AB に対する円周角 $\angle ACB$ を作る時、 $\angle ACB$ を求めなさい。

練習問題 7

円周上に点 A, B, C, D があり、点 A で接線を引いています。
接線と弦 AB が作る角が 41° です。
 $\angle ACB$ と $\angle ADB$ は、ともに弧 AB を見込む円周角です。
 $\angle ACB$ と $\angle ADB$ をそれぞれ求めなさい。

練習問題 8

中心が O の円の外部に点 P があり、 PA, PB はそれぞれ点 A, B における接線です。

$$OP = 13, \quad OA = 5$$

のとき、 PA と PB を求めなさい。

練習問題 9

ある生徒は、点 A における接線と弦 AB が作る角について、
「接点が A だから、円周上にある $\angle BAC$ と同じ大きさになる」
と考えました。
この考え方の問題点を説明し、接弦定理で対応する円周角をどのように探すか答えなさい。

演習問題の解答・解説**練習問題 1 の解答・解説**

T は接点なので、半径 OT は接線 PT に垂直です。
したがって、 $\angle OTP = 90^\circ$ です。

練習問題 2 の解答・解説

OT は接点 T への半径なので、 $OT \perp PT$ です。
したがって、三角形 OPT は直角三角形です。
三平方の定理より、

$$PT^2 = OP^2 - OT^2 = 17^2 - 8^2$$

です。
よって、

$$PT^2 = 289 - 64 = 225$$

なので、 $PT = 15$ です。

練習問題 3 の解答・解説

同じ外部の点 P から引いた 2 本の接線の長さは等しいので、

$$PA = PB$$

です。
したがって、 $PB = 14$ です。

練習問題 4 の解答・解説

同じ外部の点 P から引いた接線なので、 $PA = PB$ です。
したがって、

$$2x + 3 = 5x - 9$$

です。

よって、 $3x = 12$ なので $x = 4$ です。

このとき、 $PA = 2 \cdot 4 + 3 = 11$ です。

したがって、 $PB = 11$ でもあり、2 本の接線の長さはともに 11 です。

練習問題 5 の解答・解説

接線と弦 AB が作る角は、弧 AB に対する円周角に等しくなります。

$\angle ACB = 38^\circ$ なので、接弦定理より求める角は 38° です。

練習問題 6 の解答・解説

$\angle ACB$ は弧 AB に対する円周角です。

接弦定理より、接線と弦 AB が作る角と $\angle ACB$ は等しいので、 $\angle ACB = 63^\circ$ です。

練習問題 7 の解答・解説

接弦定理より、接線と弦 AB が作る角は弧 AB に対する円周角に等しいので、 $\angle ACB = 41^\circ$ です。

また、 $\angle ADB$ も同じ弧 AB に対する円周角なので、 $\angle ADB = 41^\circ$ です。

練習問題 8 の解答・解説

A は接点なので、 $OA \perp PA$ です。

したがって、三角形 OAP は直角三角形です。

三平方の定理より、

$$PA^2 = 13^2 - 5^2 = 144$$

なので、 $PA = 12$ です。

同じ外部の点 P から引いた 2 本の接線の長さは等しいため、 $PB = 12$ です。

したがって、 $PA = PB = 12$ です。

練習問題 9 の解答・解説

接弦定理では、接点の文字だけを見て対応する円周角を決めるわけではありません。

まず、接線と一緒に角を作っている弦を確認します。

この場合は弦 AB なので、弦の両端 A, B を結ぶ弧 AB を見ます。

そして、弧 AB を見込む円周角を探します。

したがって、たとえば円周上の点 C から弧 AB を見込む $\angle ACB$ が、接線と弦 AB が作る角に対応します。