

第 152 講 数列の性質を式で確かめる

学習目標

数列の一般項から、すべての正整数 n で成り立つ性質を式で確認できるようになる。有限個の例だけでは証明にならないことを理解し、反例によって全称の主張が崩れることを説明できるようになる。

数列の性質を確かめる考え方

数列の最初の数項を見ると、ある性質を予想できることがある。しかし、有限個の項が同じ性質を持つことだけでは、無限に続く数列のすべての項について成り立つことの証明にはならない。本講では、与えられた一般項から、任意の正整数 n について直接調べることで数列の性質を確認する。

例えば「すべての項が偶数である」という主張では、特定の項だけを見るのではなく、どの正整数 n を選んでも同じ性質が成り立つことを確認する。

一方、「すべての項が正である」というような全称の主張を否定するときは、1 つでも条件を満たさない項を見つければよい。その項が反例である。

有限個の一致は性質を予想する手掛かりにはなるが、それだけで数列全体の性質を確定することはできない。

この講の条件と増減

数列の項は、正整数 n に対して定まる実数として扱う。各数列の式は、すべての正整数 n で意味を持つように定義されているものとする。

分数を含む数列では、分母が 0 にならないことを確認し、必要に応じて分母の符号も確認する。

分母の符号によって不等式の向きが変化するため、式の比較では注意が必要である。

本講で扱う増加・減少は、厳密な増加・厳密な減少を意味する。

数列 a_n が厳密に増加するとは、すべての正整数 n について、 $a_{n+1} - a_n > 0$ が成り立つことである。

数列 a_n が厳密に減少するとは、すべての正整数 n について、 $a_{n+1} - a_n < 0$ が成り立つことである。

厳密に増加する数列について、任意の正整数 $i < j$ に対して、 k を i から $j-1$ まで動かすと、それぞれの段階で $a_k < a_{k+1}$ が成り立つ。この隣り合う項どうしの比較を順につなぐことで、

$$a_i < a_j$$

が確認できる。特に $j = i + 1$ の場合は比較する段階が 1 回だけであり、途中の項を並べて書く必要はない。

一定列ではすべての項が等しく、 $a_{n+1} - a_n = 0$ となるため、厳密な増加や厳密な減少ではない。

中心となる判断

数列の性質を確かめるときは、次の順に考える。

1. いくつかの項を見て性質を予想する。
2. 一般項 a_n を使い、任意の正整数 n で成立するかを式で調べる。
3. 成立しない場合は、条件を満たさない 1 つの項を反例として示す。

特に「すべての正整数 n で成り立つ」という主張は、1 つの反例によって否定される。

よくある誤解

数列の最初の数項だけを調べて、すべての項の性質を判断してはいけない。

例えば、最初の数項が正であっても、その後に負の項が現れる数列は存在する。また、いくつかの項で同じ規則が見えても、それだけで無限に続く数列全体の性質を証明したことにはならない。

本講では、与えられた一般項と正整数 n の範囲を使い、各性質を直接確認する方法を扱う。これは本講で扱う確認方法を示したものであり、他の証明方法を否定するものではない。

例題 1

数列 $a_n = n(n+1)$ が、すべての正整数 n について偶数であることを確かめよ。

例題 1 の解答・解説

連続する 2 つの整数 n と $n+1$ のうち、必ず一方は偶数である。

n が偶数の場合、因数 n 自体が偶数であり、整数 $n+1$ との積も偶数である。

n が奇数の場合、 $n+1$ は偶数である。このときも、積 $n(n+1)$ に偶数が含まれるので、

$$a_n = n(n+1)$$

は偶数である。

したがって、任意の正整数 n について a_n は偶数である。

ここでは、いくつかの項を計算して偶数になることを確認したのではなく、 n の偶奇によらず成り立つことを示している点が重要である。

例題 2

数列 $a_n = \frac{n}{n+1}$ について、すべての正整数 n で $0 < a_n < 1$ が成り立つこと、および厳密に増加することを確かめよ。

例題 2 の解答・解説

正整数 n では $n > 0$ であり、分母についても $n + 1 > 0$ である。したがって、分数の符号は正であるから、

$$a_n = \frac{n}{n+1} > 0$$

となる。

また、

$$1 - a_n = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

である。

$n + 1 > 0$ より、

$$\frac{1}{n+1} > 0$$

だから、 $1 - a_n > 0$ である。よって、 $a_n < 1$ となる。

以上より、すべての正整数 n で、 $0 < a_n < 1$

が成り立つ。

次に、厳密な増加を確かめるため、隣り合う項の差を調べる。

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{1}{(n+2)(n+1)} \end{aligned}$$

正整数 n では分母 $(n+2)(n+1)$ は正であるため、 $a_{n+1} - a_n > 0$ となる。

したがって、任意の正整数 n について $a_{n+1} > a_n$ が成り立ち、この数列は厳密に増加する。

なお、一定列では $a_{n+1} = a_n$ となる。今回は差が正であるため、一定列とは異なる。

例題 3

数列 $a_n = 11 - 2n$ について、最初の 5 項が正であっても、すべての項が正とは限らないことを確かめよ。

例題 3 の解答・解説

一般項から各項を計算する。

n	1	2	3	4	5	6
$a_n = 11 - 2n$	9	7	5	3	1	-1

最初の 5 項では、9, 7, 5, 3, 1 となり、すべて正である。

しかし、 $n = 6$ のとき、 $a_6 = 11 - 2 \times 6 = -1$ となる。

したがって、 $n = 6$ は「すべての項が正である」という主張に対する反例である。

このことから、有限個の項が正であることだけでは、数列全体の性質を証明したことにはならない。

演習問題

練習問題 1

数列 $a_n = n^2 + n + 1$ について、すべての正整数 n で a_n が奇数であることを確かめよ。

練習問題 2

数列 $a_n = 3n - 2$ について、「すべての項が奇数である」という主張が正しいか判定し、理由を示せ。

練習問題 3

数列 $a_n = \frac{2n+1}{n+1}$ について、すべての正整数 n で $1 < a_n < 2$ が成り立つことを確かめよ。

練習問題 4

数列 $a_n = (n-2)^2$ について、すべての項が非負であることを示し、0 となる n をすべて求めよ。また、「すべての項が正である」という主張が成り立つか判定せよ。

練習問題 5

数列 $a_n = n^2$ について、厳密に増加することを確かめよ。

練習問題 6

数列 $a_n = 5$ について、一定列であり、厳密に増加でも厳密に減少でもないことを確かめよ。

練習問題 7

数列 $a_n = 8 - 3n$ について、「すべての項が正である」という主張が成り立たないことを反例で示せ。

練習問題 8

数列 $a_n = \frac{n+2}{n}$ について、厳密に減少することを確かめよ。

練習問題 1 の解答・解説

一般項を変形する。

$$a_n = n^2 + n + 1 = n(n + 1) + 1$$

連続する 2 整数 n と $n + 1$ のうち、一方は必ず偶数である。

したがって、 $n(n + 1)$

は偶数である。

偶数に 1 を加えると奇数になるため、 $a_n = n(n + 1) + 1$

は奇数である。

よって、任意の正整数 n について a_n は奇数である。

練習問題 2 の解答・解説

主張が正しいかを確認する。

n が偶数の場合、 $3n$ は偶数であるため、 $3n - 2$

も偶数になる。

$n = 2$ とすると、 $a_2 = 3 \times 2 - 2 = 4$ であり、偶数である。

したがって、 $n = 2$ は「すべての項が奇数である」という主張に対する反例である。

よって、この主張は正しくない。

なお、 n が奇数の場合は $3n - 2$ も奇数になるが、1 つでも条件を満たさない項があれば全称の主張は否定される。

練習問題 3 の解答・解説

分母について確認する。

正整数 n では、 $n + 1 > 0$ であるため、分母は正である。

まず下限を調べる。

$$a_n - 1 = \frac{2n + 1}{n + 1} - 1 = \frac{n}{n + 1}$$

$n > 0$ 、 $n + 1 > 0$ より、

$$\frac{n}{n + 1} > 0$$

である。

したがって、 $a_n > 1$ となる。

次に上限を調べる。

$$2 - a_n = 2 - \frac{2n + 1}{n + 1} = \frac{1}{n + 1}$$

である。

$n + 1 > 0$ より、

$$\frac{1}{n + 1} > 0$$

となるので、 $a_n < 2$ である。

以上より、すべての正整数 n について、 $1 < a_n < 2$

が成り立つ。

練習問題 4 の解答・解説

実数の平方は必ず 0 以上であるため、 $(n-2)^2 \geq 0$ が成り立つ。

したがって、任意の正整数 n について、 $a_n \geq 0$ である。

次に、等号が成立する条件を調べる。

$(n-2)^2 = 0$ となるのは、 $n = 2$ のときである。

実際に、 $a_2 = (2-2)^2 = 0$ となる。

よって、 $n = 2$ は「すべての項が正である」という主張に対する反例である。

全ての項は非負だが、 $a_2 = 0$ があるため「全ての項が正である」という主張は成り立たない。

練習問題 5 の解答・解説

厳密な増加を確認するため、隣接差を調べる。

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (n+1)^2 - n^2 \\ &= 2n + 1 \end{aligned}$$

正整数 n では、 $2n + 1 > 0$ である。

したがって、 $a_{n+1} - a_n > 0$ となる。

よって、任意の正整数 n で $a_{n+1} > a_n$ が成り立つため、この数列は厳密に増加する。

練習問題 6 の解答・解説

一般項は、 $a_n = 5$ である。

したがって、任意の正整数 n について、 $a_{n+1} = 5$ 、 $a_n = 5$ となる。

よって、 $a_{n+1} - a_n = 0$ である。

差が 0 であるため、各項は変化しない。この数列は一定列である。

厳密な増加では $a_{n+1} - a_n > 0$ 、厳密な減少では $a_{n+1} - a_n < 0$ が必要であるため、この数列はどちらでもない。

練習問題 7 の解答・解説

「すべての項が正である」という主張を否定するには、1 つでも正でない項を示せばよい。

一般項は、 $a_n = 8 - 3n$ である。

$n = 3$ のとき、 $a_3 = 8 - 3 \times 3 = -1$ となる。

これは正ではない。

したがって、 $n = 3$ の項は反例であり、「すべての項が正である」という主張は成り立たない。

最初の数項だけが正であることを調べても、数列全体の性質の証明にはならない。

練習問題 8 の解答・解説

分母について確認する。

正整数 n では、 $n > 0$ なので分母は正である。

隣接差を調べる。

$$\begin{aligned}a_{n+1} - a_n &= \frac{n+3}{n+1} - \frac{n+2}{n} \\&= \frac{n(n+3) - (n+1)(n+2)}{n(n+1)} \\&= \frac{n^2 + 3n - (n^2 + 3n + 2)}{n(n+1)} \\&= -\frac{2}{n(n+1)}\end{aligned}$$

正整数 n では、 $n(n+1) > 0$ であるため、

$$-\frac{2}{n(n+1)} < 0$$

となる。

したがって、 $a_{n+1} < a_n$

が任意の正整数 n で成り立つ。

よって、この数列は厳密に減少する。