第 233 講 空間座標

学習目標

- 空間の点を 3 つの座標で表し、各座標の意味を説明できる。
- 2 点間の距離を 3 方向の座標差から求められる。
- 中点・内分点・外分点の座標を、3 つの座標それぞれに同じ比を適用して求められる。
- 球面の方程式を距離の条件として読み書きできる。

1. 3 つの数で空間の位置を指定する

高さを加えるだけではなく、3 方向を独立に記録する

平面では、互いに直交する x 軸と y 軸への移動量で点の位置を指定した。空間では、両方に直交する z 軸を加える。点 P の座標 $P(x, y, z)$ は、原点 O から x 軸方向へ x、y 軸方向へ y、z 軸方向へ z だけ進んだ位置を表す。
3 方向は独立している。例えば x, y が同じ 2 点は同じ鉛直線上にあり、z だけが異なる。一方、$z = 0$ の点はすべて xy 平面上にある。座標平面はほかにも、$y = 0$ の zx 平面、$x = 0$ の yz 平面がある。

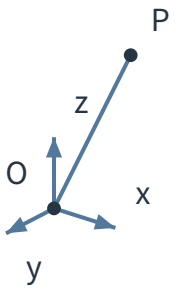

図 1　空間座標の 3 軸と点 P(3,2,4)

投影図の見かけと空間の量を区別する

紙面の図は 3 次元の点を平面へ投影した模式図である。図上で線分が短く見えたり、軸が直角に見えなかったりしても、空間での長さや直交関係が変わるわけではない。計算では必ず 3 次元座標を使う。

例題 1：座標平面との位置関係

点 $A(2, -3, 0)$、$B(0, 4, -1)$、$C(0, 0, 5)$ は、それぞれどの座標平面または座標軸上にあるか述べよ。

例題 1 の解答・解説

A は $z=0$ を満たすので xy 平面上にある。B は $x=0$ を満たすので yz 平面上にある。C は $x=y=0$ を満たすので z 軸上にある。
1 つの座標が 0 なら対応する座標平面上、2 つの座標が 0 なら残る座標の軸上と判断できる。

2. 3 方向の座標差から距離を求める

距離公式は三平方の定理を 2 回使った結果

点 $A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$ について、3 方向の座標差を $a=x_2-x_1$、$b=y_2-y_1$、$c=z_2-z_1$ とする。まず xy 平面に平行な移動の長さは $\sqrt{a^2+b^2}$ である。この移動と z 軸方向の移動 c は直交するため、もう一度三平方の定理を使うと

$$AB^2=\left(a^2+b^2\right)+c^2$$

となる。したがって

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

である。公式を覚えるより、「各方向の差を 2 乗して足す」と捉えると、平面の場合とのつながりが見える。

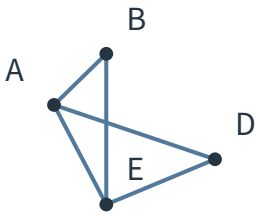

図 2　3 方向の差から線分 AB の長さを復元する模式図

例題 2：座標差と距離

$A(1,-2,3)$、$B(5,1,-1)$ とする。各方向の座標差と AB を求めよ。

例題 2 の解答・解説

終点から始点を各座標について引くと、座標差は

$$(5-1,\ 1-(-2),\ -1-3)=(4,3,-4)$$

である。よって $AB=\sqrt{4^2+3^2+(-4)^2}=\sqrt{41}$ である。距離では差の符号は 2 乗で消えるが、引く順序をそろえると計算ミスを減らせる。

3. 中点・内分点・外分点は各座標を同じ比で分ける

空間でも内分の考え方は各座標で同じ

$A(x_1, y_1, z_1)$、$B(x_2, y_2, z_2)$ を結ぶ線分を $m : n$ に内分する点を P とする。$AP : PB = m : n$ なら、P は A から B へ線分全体の $\frac{m}{m+n}$ だけ進んだ点である。したがって x 座標は

$$x_1 + \frac{m}{m+n}(x_2 - x_1) = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n}$$

となる。y, z 座標も同じ比で分けるため、

$$P\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n},\ \frac{ny_1 + my_2}{m+n},\ \frac{nz_1 + mz_2}{m+n}\right)$$

を得る。A に掛かる係数は反対側の比 n、B に掛かる係数は反対側の比 m である。中点は $m = n = 1$ の場合なので、各座標の平均になる。

$m, n > 0$、$m \neq n$ とする。P が線分 AB の外側にあり、$AP : PB = m : n$ を満たす外分点なら

$$P\left(\frac{-nx_1 + mx_2}{m-n},\ \frac{-ny_1 + my_2}{m-n},\ \frac{-nz_1 + mz_2}{m-n}\right)$$

である。内分では重みを足すのに対し、外分では一方を負にして重みを引く。

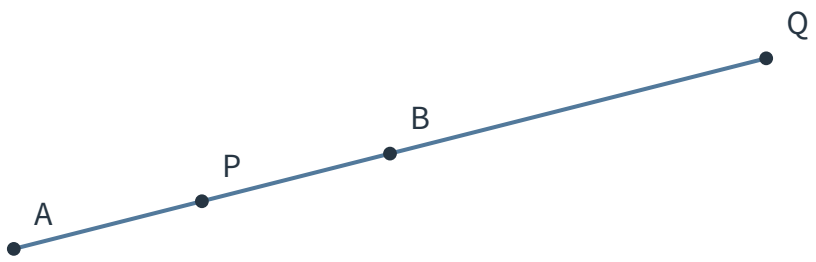

図 3　A と B を結ぶ直線上の内分点 P と外分点 Q

例題 3：中点・内分点・外分点

$A(-2, 1, 5)$、$B(4, 7, -1)$ とする。
(1) 線分 AB の中点 M の座標を求めよ。
(2) 線分 AB を $AP : PB = 2 : 1$ に内分する点 P の座標を求めよ。
(3) 線分 AB を $AQ : QB = 2 : 1$ に外分する点 Q の座標を求めよ。

例題 3 の解答・解説

(1) 各座標の平均を取ると $M(1,4,2)$ である。
(2) $AP:PB=2:1$ なので、A の各座標に 1、B の各座標に 2 を掛けて 3 で割る。
$x_P=\frac{1\cdot(-2)+2\cdot4}{3}=2$ である。
$y_P=\frac{1\cdot1+2\cdot7}{3}=5$ である。
$z_P=\frac{1\cdot5+2\cdot(-1)}{3}=1$ である。
したがって $P=(2,5,1)$ である。実際、A から P への座標差は $(4,4,-4)$、P から B への座標差は $(2,2,-2)$ であり、x,y,z それぞれの座標差の比は $2:1$ となる。
(3) 外分の公式を各座標に適用する。
$x_Q=\frac{-1\cdot(-2)+2\cdot4}{2-1}=10$ である。
$y_Q=\frac{-1\cdot1+2\cdot7}{2-1}=13$ である。
$z_Q=\frac{-1\cdot5+2\cdot(-1)}{2-1}=-7$ である。
したがって $Q=(10,13,-7)$ である。A から Q への座標差は $(12,12,-12)$、Q から B への座標差は $(-6,-6,6)$ であり、距離の比は $2:1$、向きは反対である。

4. 球面は中心からの距離が一定の点の集まり

球面の方程式

中心 $C(a,b,c)$、半径 $r>0$ の球面上の点を $P(x,y,z)$ とする。条件 $CP=r$ を 2 乗すれば

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

を得る。等号を $\leq$ に変えると、球面とその内部を合わせた球を表す。

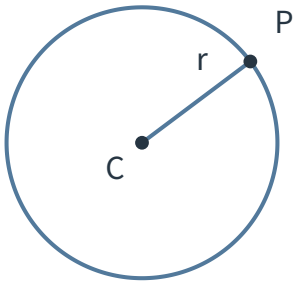

図 4　球面を中心 C を通る平面で切った断面（半径 r の円）

式から中心と半径を読む

3 つの平方が足されている形へ直す。例えば $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=16$ の中心は $(2,-1,3)$、半径は 4 である。$y+1=y-(-1)$ と読むことが符号の誤りを防ぐ。

例題 4：球面の方程式

中心が $C(1,-2,3)$ で、点 $A(3,-1,5)$ を通る球面の方程式を求めよ。

例題 4 の解答・解説

半径は CA である。その 2 乗は

$$CA^2=(3-1)^2+\{-1-(-2)\}^2+(5-3)^2=4+1+4=9$$

である。したがって球面の方程式は $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$ である。

5. 演習

演習 1：座標と位置

点 $P(-3,0,4)$ について、属する座標平面を答え、原点からの距離を求めよ。

演習 2：2 点間の距離

$A(2,1,-2)$、$B(-1,5,4)$ のとき、3 方向の座標差と AB を求めよ。

演習 3：等距離となる未知数

$A(1,0,2)$、$B(-1,2,0)$、$P(t,1,1)$ とする。$PA=PB$ となる t を求めよ。

演習 4：内分点から端点を求める

$A(1,-2,3)$ とし、線分 AB を $AP:PB=1:2$ に内分する点が $P(3,0,1)$ である。点 B の座標を求めよ。

演習 5：球面を読む

球面 $x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z-11=0$ の中心と半径を求めよ。

演習 6：直径から球面を作る

$A(1,2,-1)$、$B(5,-2,3)$ を直径の両端とする球面の方程式を求めよ。

6. 演習の解答・解説

演習 1 の解答・解説

$y=0$ なので P は zx 平面上にある。原点からの距離は $OP=\sqrt{(-3)^2+0^2+4^2}=5$ である。

演習 2 の解答・解説

座標差は $(-1-2, 5-1, 4-(-2)) = (-3, 4, 6)$ である。したがって $AB = \sqrt{(-3)^2+4^2+6^2} = \sqrt{61}$ である。

演習 3 の解答・解説

距離の 2 乗を比較する。

$$PA^2 = (t-1)^2 + 1^2 + (-1)^2 = (t-1)^2 + 2$$

$$PB^2 = (t+1)^2 + (-1)^2 + 1^2 = (t+1)^2 + 2$$

よって $(t-1)^2 = (t+1)^2$ であり、展開して $-2t = 2t$ となるから $t = 0$ である。

演習 4 の解答・解説

$AP : PB = 1 : 2$ なので、内分点の公式を各座標に適用する。$B(x, y, z)$ とおけば、$3 = \frac{2\cdot 1 + x}{3}$、$0 = \frac{2\cdot(-2)+y}{3}$、$1 = \frac{2\cdot 3 + z}{3}$ である。これらを解いて $B(7, 4, -3)$ を得る。A から P への座標差は $(2, 2, -2)$、P から B への座標差は $(4, 4, -4)$ なので、比と向きも条件に合う。

演習 5 の解答・解説

平方完成すると

$$(x-2)^2 - 4 + (y+3)^2 - 9 + (z-1)^2 - 1 - 11 = 0$$

である。よって $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 25$ となるから、中心は $(2, -3, 1)$、半径は 5 である。

演習 6 の解答・解説

中心は AB の中点なので $C(3, 0, 1)$ である。C から A への座標差は $(-2, 2, -2)$ であるから、半径の 2 乗は $4 + 4 + 4 = 12$ である。したがって球面の方程式は

$$(x-3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 12$$

である。