第 209 講 分数関数を含む積分

学習目標

この講では、分数関数を含む積分について、分母の形を観察して基本形へ変形する判断ができることを目標とする。
具体的には、次のことができるようになる。
- 分母が 0 になる値を除外し、定義域を連結した開区間ごとに考えられる。
- 一次分母の係数を確認し、積分するときの係数補正を正しく行える。
- 整式除法や部分分数分解によって、既習の基本的な積分へ直す理由を説明できる。
- 求めた不定積分を微分して検算できる。

分数関数を積分するときの見方

この講で log は自然対数を表す。
分数関数の積分では、いきなり積分計算を始めるのではなく、まず分母を見ることが重要である。分母が 0 になる値では元の関数が定義されない。そのため、例えば $\frac{1}{(x-1)(x+2)}$ では $x=1,-2$ を除外する必要がある。
このとき定義域は 1 つにつながった範囲ではなく、定義域全体は 3 つの連結開区間 $(-\infty,-2)$、$(-2,1)$、$(1,\infty)$ に分かれる。
不定積分の積分定数は、それぞれの連結開区間ごとに別々に考える。これは、除外点を越えて別の区間へ移動できず、各区間では独立した積分結果になるためである。各区間で表される積分定数 C は任意の実数を表す。
数直線の表示範囲は図として見やすくするための有限範囲であり、定義域全体をその範囲だけに限定するものではない。



図 1　分母が 0 になる点を除いた 3 つの連結開区間

分数関数の積分では、式をそのまま処理するのではなく、既習の積分公式が使える形へ変形することを考える。
a,b は実定数であり、一次分母 $ax+b$ では $a\neq 0$ を満たす場合を扱う。
一次分母が $ax+b$ の形である場合は、$a\neq 0$ を確認する。$a=0$ の場合は一次分母ではなく、定数分母として別の式になるため、この講で扱う形から除外する。$a\neq 0$ のとき、$ax+b$ の微分は a であるため、微分すると係数 a が現れる。この係数を打ち消すために $\frac{1}{a}$ を掛けて調整する。係数を調整すると、次の基本公式を得る。

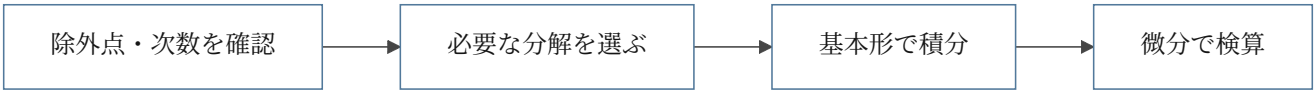
$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx=\frac{1}{a}\log|\,ax+b\,|+C\quad(a\neq 0)$$

また、分子の次数が分母以上である場合は整式除法を行い、分母が異なる一次因子に分解できる場合は部分分数分解を利用する。

©ミライコーチング

これらの操作は計算を複雑にするためではなく、既に知っている基本的な積分へ戻すために行うものである。

分数関数を含む積分の判断手順



分数関数を含む積分では、式の状態に応じて必要な変形を選び、基本形へ直してから積分結果を確認する流れを示す図である。整式除法や部分分数分解は常に行うものではなく、分子と分母の関係や分母の因子の形に応じて選択する。
一次分母を含む場合は、係数が 0 でないことを確認する。分母 $ax+b$ について $a=0$ の場合は一次分母ではなく、別の形の式として扱う必要がある。
この講は異なる 2 つの一次因子の場合までを扱う。約分して式が簡単になっても、元の分母が 0 となる点は定義域へ戻さない。分母の形によって使える変形が変わるため、最初の式の観察が重要である。

例題

例題 1：一次分母の係数補正

$\int \frac{1}{2x+1}\,dx$ を求めなさい。ただし、定義域は $\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$ とする。

例題 1 の解答・解説

分母は $2x+1$ であり、一次式の係数 $a=2$ は 0 ではない。
$\log|\,2x+1\,|$ を微分すると $\frac{2}{2x+1}$ となり、これは元の被積分関数 $\frac{1}{2x+1}$ の 2 倍である。そのため、微分した結果を元の形に戻すために $\frac{1}{2}$ を掛ける必要がある。
次のように係数を調整して計算する。

$$\int \frac{1}{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x+1}\,dx$$

基本公式を用いると、積分結果は $\frac{1}{2}\log|\,2x+1\,|+C$ となる。
積分結果を微分すると、次の式を得る。

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2x+1}=\frac{1}{2x+1}$$

微分結果が元の被積分関数と一致するため、求めた積分結果は正しい。

例題 2：整式除法による変形

$\int \frac{x^2+1}{x-1}\,dx$ を求めなさい。ただし、定義域は $(-\infty,1)$ とする。

例題 2 の解答・解説

分子の次数は 2 であり、分母の次数は 1 であるため、整式除法によって分数式を基本形へ変形する。
未知の余り A を用い、次の除法恒等式を考える。

$$x^2+1=(x-1)(x+1)+A$$

右辺を展開すると x^2-1+A になる。左辺の x^2+1 と恒等的に一致するため、定数項を比較して $A=2$ を得る。
したがって、次の整式除法の結果を用いる。

$$x^2+1=(x-1)(x+1)+2$$

この式を使って、次のように分数式を変形する。

$$\begin{aligned}\frac{x^2+1}{x-1}&=\frac{(x-1)(x+1)+2}{x-1}\\&=x+1+\frac{2}{x-1}\end{aligned}$$

基本的な積分へ分解できたため、次のように計算する。

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2+1}{x-1}\,dx&=\int\left(x+1+\frac{2}{x-1}\right)dx\\&=\frac{x^2}{2}+x+2\log|\,x-1\,|+C\end{aligned}$$

積分結果を微分すると、次の式を得る。

$$x+1+\frac{2}{x-1}$$

この式を通分すると $\frac{x^2+1}{x-1}$ となり、元の被積分関数と一致するため正しい。

例題 3：部分分数分解による基本形への変形

$\int\frac{1}{(x-1)(x+2)}\,dx$ を求めなさい。ただし、定義域は $(-\infty,-2)$、$(-2,1)$、$(1,\infty)$ の各連結開区間で考える。

例題 3 の解答・解説

分母は $x-1$ と $x+2$ という異なる一次因子の積であるため、部分分数分解を利用する。
実定数 A,B を用いて、次の形への分解を考える。

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}$$

両辺に $(x-1)(x+2)$ を掛けると、次の多項式の恒等式を得る。

$$1=A(x+2)+B(x-1)$$

この等式は元の分数式の定義域でのみ成り立つものではなく、展開後の多項式が全実数で一致する恒等式である。そのため、$x=1$ や $x=-2$ を代入して係数を求めることができる。
$x=1$ を代入すると $1=3A$ となり、$A=\frac{1}{3}$ を得る。また、$x=-2$ を代入すると $1=-3B$ となり、$B=-\frac{1}{3}$ を得る。
したがって、部分分数分解は次の形になる。

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\frac{1}{x+2}$$

基本形へ変形できたため、次のように積分する。

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x-1)(x+2)}\,dx &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+2}dx \\ &= \frac{1}{3}\log|\,x-1\,| - \frac{1}{3}\log|\,x+2\,| + C\end{aligned}$$

元の分数式では $x = 1, -2$ が除外点である。導入で示した数直線の点 $-2, 1$ は、この 2 つの除外点に対応している。
したがって、不定積分の積分定数 C は $(-\infty, -2)$、$(-2, 1)$、$(1, \infty)$ の各連結開区間ごとに考える。
積分結果を微分すると、次の式を得る。

$$\frac{1}{3}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\frac{1}{x+2}$$

この式を通分すると次の式になる。

$$\frac{1}{3}\frac{(x+2)-(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$$

微分結果が元の被積分関数と一致するため、求めた積分結果は正しい。

演習

演習 1：一次分母の係数補正

$\int \frac{3}{2x-1}\,dx$ を求めなさい。ただし、定義域は $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ とする。

演習 2：負の係数をもつ一次分母

$\int \frac{1}{3-2x}\,dx$ を求めなさい。ただし、定義域は $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ とする。

演習 3：整式除法による変形

$\int \frac{x^2+2x+2}{x+1}\,dx$ を求めなさい。ただし、定義域は $(-1, \infty)$ とする。

演習 4：部分分数分解による変形

$\int \frac{1}{(x-2)(x+1)}\,dx$ を求めなさい。ただし、定義域は $(-\infty, -1)$、$(-1, 2)$、$(2, \infty)$ の各連結開区間で考える。

演習 5：部分分数分解で係数を求める

$\int \frac{2x+1}{(x-1)(x+2)}\,dx$ を求めなさい。ただし、定義域は $(-\infty, -2)$、$(-2, 1)$、$(1, \infty)$ の各連結開区間で考える。

©ミライコーチング

演習 6：約分後も定義域を保持する積分

$\int \frac{x^2-1}{x-1}\,dx$ を求めなさい。ただし、元の分数式の定義域を考え、$x=1$ を除外した $(-\infty,1)$、$(1,\infty)$ の各連結開区間で考える。

演習 7：誤った原始関数の修正

$\int \frac{1}{2x+1}\,dx$ を考える。ある学習者は原始関数を $\log|\,2x+1\,|+C$ とした。この結果が正しいかを微分で判定し、正しい原始関数を求めなさい。ただし、定義域は $\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$ とする。

演習 8：積分定数と連結開区間

$\int \frac{1}{(x-1)(x+2)}\,dx$ を考える。ただし、定義域は $(-\infty,-2)$、$(-2,1)$、$(1,\infty)$ の各連結開区間で考える。
3 つの連結開区間で積分定数を同じ値にしなければならないかを、理由を含めて説明しなさい。

演習の解答・解説

演習 1 の解答・解説

分母 $2x-1$ の係数 $a=2$ は 0 ではないため、一次分母の基本公式を利用できる。
3 を外に出し、係数を調整すると次のように計算する。

$$\int \frac{3}{2x-1}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2}{2x-1}\,dx$$

したがって、積分結果は $\frac{3}{2}\log|\,2x-1\,|+C$ となる。
積分結果を微分すると、次の式を得る。

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{2x-1}=\frac{3}{2x-1}$$

微分結果が元の被積分関数と一致するため、正しい。

演習 2 の解答・解説

分母 $3-2x$ の係数は負であり、$a=-2$ と考える。
一次分母の基本公式に合わせるため、分母の微分で現れる -2 を利用する。
次のように計算する。

$$\int \frac{1}{3-2x}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2}{3-2x}\,dx$$

したがって、積分結果は $-\frac{1}{2}\log|\,3-2x\,|+C$ となる。
積分結果を微分すると、次の式を得る。

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{-2}{3-2x}=\frac{1}{3-2x}$$

微分結果が元の被積分関数と一致するため、正しい。

©ミライコーチング

演習 3 の解答・解説

分子の次数が分母の次数以上であるため、整式除法を行う。
未知の余り A を用い、次の除法恒等式を考える。

$$x^2+2x+2=(x+1)(x+1)+A$$

右辺を展開すると $x^2+2x+1+A$ になる。左辺と恒等的に一致するため、定数項を比較して $A=1$ を得る。
したがって、次の整式除法の結果を用いる。

$$x^2+2x+2=(x+1)^2+1$$

分数式を基本形へ変形すると、次の式を得る。

$$\begin{aligned}\frac{x^2+2x+2}{x+1}&=\frac{(x+1)^2+1}{x+1}\\&=x+1+\frac{1}{x+1}\end{aligned}$$

よって、次のように積分する。

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2+2x+2}{x+1}\,dx&=\int\left(x+1+\frac{1}{x+1}\right)dx\\&=\frac{x^2}{2}+x+\log|\,x+1\,|+C\end{aligned}$$

積分結果を微分すると、次の式を得る。

$$x+1+\frac{1}{x+1}$$

これを通分すると $\frac{x^2+2x+2}{x+1}$ となり、元の被積分関数と一致する。

演習 4 の解答・解説

分母は異なる一次因子 $(x-2)$ と $(x+1)$ の積であるため、部分分数分解を利用する。
実定数 A, B を用いて、次の形への分解を考える。

$$\frac{1}{(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}$$

両辺に $(x-2)(x+1)$ を掛けると、次の多項式の恒等式を得る。

$$1=A(x+1)+B(x-2)$$

この恒等式は展開後の多項式が全実数で一致する関係である。そのため、$x=2$ と $x=-1$ を代入して係数を求めることができる。
$x=2$ を代入すると $1=3A$ となり、$A=\frac{1}{3}$ を得る。
$x=-1$ を代入すると $1=-3B$ となり、$B=-\frac{1}{3}$ を得る。
したがって、次の部分分数分解を得る。

$$\frac{1}{(x-2)(x+1)}=\frac{1}{3}\frac{1}{x-2}-\frac{1}{3}\frac{1}{x+1}$$

基本形へ変形できたため、次のように積分する。

$$\int \frac{1}{(x-2)(x+1)}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-2}dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}dx$$
$$= \frac{1}{3}\log|\,x-2\,| - \frac{1}{3}\log|\,x+1\,| + C$$

元の分母は $x=2,-1$ で 0 になるため、定義域は $(-\infty,-1)$、$(-1,2)$、$(2,\infty)$ の各連結開区間で考える。
積分結果を微分すると、次の式を得る。

$$\frac{1}{3}\frac{1}{x-2} - \frac{1}{3}\frac{1}{x+1}$$

この式を通分すると次の式になる。

$$\frac{1}{3}\frac{(x+1)-(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{1}{(x-2)(x+1)}$$

得られた式は元の被積分関数と一致する。

演習 5 の解答・解説

分母は異なる一次因子 $(x-1)$ と $(x+2)$ の積であるため、部分分数分解を利用する。
実定数 A,B を用いて、次の形への分解を考える。

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

両辺に $(x-1)(x+2)$ を掛けると、次の多項式の恒等式を得る。

$$2x+1 = A(x+2) + B(x-1)$$

この恒等式は全ての実数で成り立つため、$x=1$ と $x=-2$ を代入して係数を求めることができる。
$x=1$ を代入すると $3=3A$ となり、$A=1$ を得る。
$x=-2$ を代入すると $-3=-3B$ となり、$B=1$ を得る。
したがって、次の部分分数分解を得る。

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}$$

基本形へ変形できたため、次のように積分する。

$$\int \frac{2x+1}{(x-1)(x+2)}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{x+2}\,dx$$
$$= \log|\,x-1\,| + \log|\,x+2\,| + C$$

積分結果を微分すると、次の式を得る。

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}$$

この式を通分すると次の式になる。

$$\frac{(x+2)+(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{2x+1}{(x-1)(x+2)}$$

得られた式は元の被積分関数と一致する。

演習 6 の解答・解説

元の分数式では分母が 0 になる $x=1$ を除外する必要がある。
分子を因数分解すると $x^2-1=(x-1)(x+1)$ であるため、$x\neq 1$ の範囲では約分できる。

$$\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$$

ただし、約分後の式 $x+1$ は $x=1$ でも定義されるが、元の分数式では定義されない。そのため、定義域は $(-\infty,1)$ と $(1,\infty)$ のまま保持する。
よって、次のように積分する。

$$\int \frac{x^2-1}{x-1}\,dx=\int (x+1)\,dx=\frac{x^2}{2}+x+C$$

積分結果を微分すると、次の式を得る。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}+x+C\right)=x+1$$

約分後の式と一致し、元の定義域 $x\neq 1$ の条件も保持しているため正しい。

演習 7 の解答・解説

学習者の結果 $\log|\,2x+1\,|+C$ が正しいかを微分で確認する。
積分結果を微分すると、次の式を得る。

$$\frac{d}{dx}\log|\,2x+1\,|=\frac{2}{2x+1}$$

これは元の被積分関数 $\frac{1}{2x+1}$ の 2 倍であるため、そのままでは正しい原始関数ではない。
微分で現れる係数 2 を打ち消すため、$\frac{1}{2}$ を掛ける必要がある。
したがって、正しい原始関数は $\frac{1}{2}\log|\,2x+1\,|+C$ である。
積分結果を微分すると、次の式を得る。

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2x+1}=\frac{1}{2x+1}$$

元の被積分関数と一致するため、修正後の結果が正しい。

演習 8 の解答・解説

元の分数式では $x=1,-2$ が除外点であり、定義域は $(-\infty,-2)$、$(-2,1)$、$(1,\infty)$ の 3 つの連結開区間に分かれる。
部分分数分解は次の形になる。

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{3}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{3}\frac{1}{x+2}$$

したがって、各連結開区間での原始関数は次の形で表される。

$$\frac{1}{3}\log|\,x-1\,|-\frac{1}{3}\log|\,x+2\,|+C$$

3 つの連結開区間で積分定数を同じ値にする必要はない。これは、除外点 $x=-2,1$ を越えて区間を移動できず、それぞれの区間では別々の原始関数を考えるためである。
例えば $(-\infty,-2)$ 上の積分定数と $(-2,1)$ 上の積分定数は独立して選ぶことができる。
積分結果を微分すると、次の式を得る。

$$\frac{1}{3}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{3}\frac{1}{x+2}$$

通分すると元の被積分関数 $\frac{1}{(x-1)(x+2)}$ に一致するため、各区間でこの形の原始関数が成り立つ。