

第 95 講 円と直線の位置関係

この講の目標

- ・ 円と直線の交点が、2 つの式を同時に満たす点であると理解できる。
- ・ 直線の式を円の式へ代入し、1 変数の二次方程式へ整理できる。
- ・ 二次方程式の実数解の個数から、円と直線の交点の個数を判断できる。
- ・ 判別式を使って、直線が円に接する条件を求められる。
- ・ 交点がある場合に、 x 座標だけで終わらず交点の座標まで求められる。

1. 交点は「2 つの式を同時に満たす点」である

円と直線を式で結び付ける

円と直線が交わる点では、その点の座標が円の式と直線の式の両方を満たしている。

例えば、円

$$x^2 + y^2 = 25$$

と直線 $y = x + 1$ の交点を考える。

交点では $y = x + 1$ が成り立つので、円の式の y を $x + 1$ に置き換えればよい。

$$x^2 + (x + 1)^2 = 25$$

これを整理すると、 x だけの二次方程式になる。この二次方程式の実数解が、交点の x 座標を表す。円と直線の問題では、「図形どうしの交わり」を「方程式の共通解」へ変えることが中心となる。この例では、後で求める 2 つの共通点 $(-4, -3)$ と $(3, 4)$ を、円と直線の両方の式に代入して確かめる。

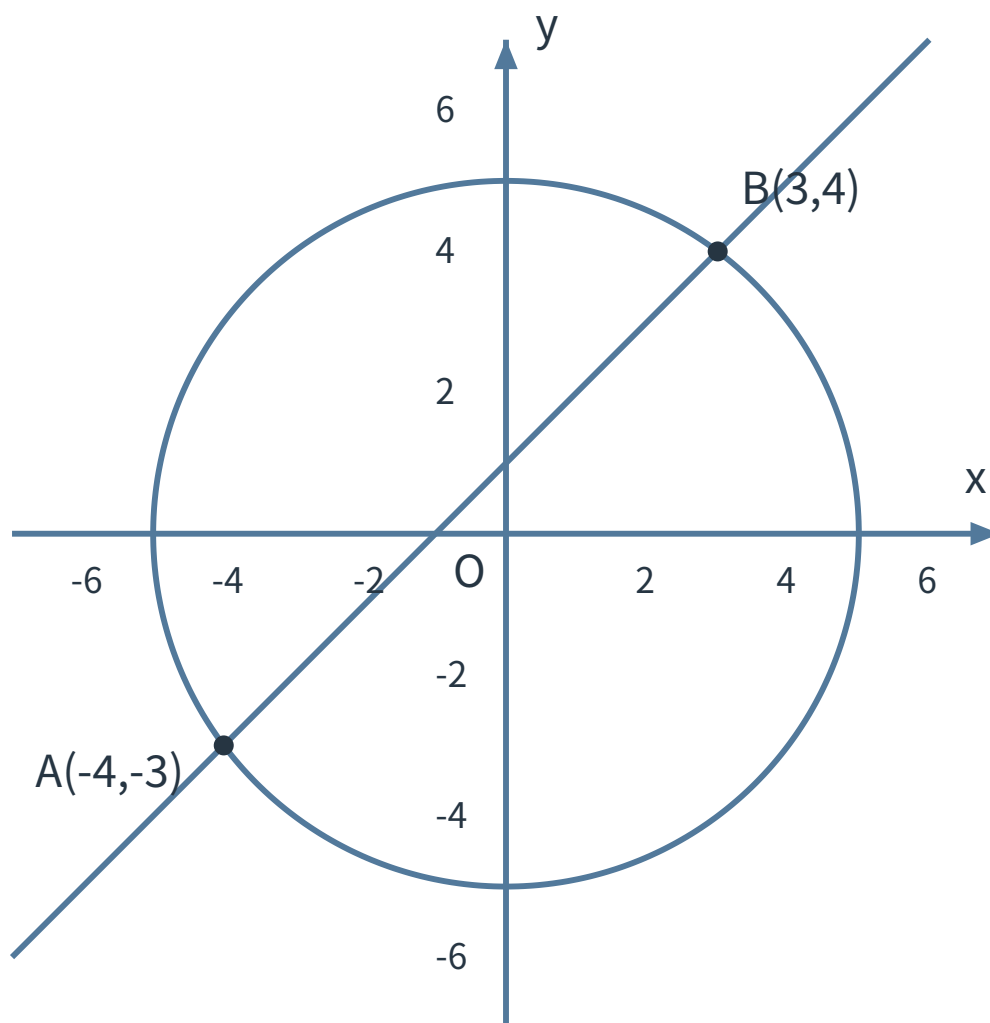


図1 円と直線 $y=x+1$: 交点 A、B

図の $A(-4,-3)$ と $B(3,4)$ は、例題1で求める交点である。円周上にあることと直線上にあることを代入で確かめれば、図と式の両方から「2点で交わる」と判断できる。

基本手順

円と直線の交点を求める基本手順は次の通りである。

1. 直線の式を円の式へ代入する。
2. 1変数の二次方程式へ整理する。
3. 二次方程式を解き、交点の x 座標を求める。
4. 求めた x を直線の式へ戻し、 y 座標を求める。
5. 得られた座標が円と直線の両方の式を満たすことを確認する。

2. 二次方程式の解の個数と位置関係

判別式で交点の個数を判断する

直線を円の式へ代入して

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

という二次方程式が得られたとする。

この方程式の判別式を $D = B^2 - 4AC$ とすると、実数解の個数によって円と直線の位置関係が決まる。

判別式	二次方程式の実数解	円と直線の位置関係
$D > 0$	異なる 2 個	2 点で交わる
$D = 0$	1 個	1 点で接する
$D < 0$	0 個	交わらない

判別式を使えば、実際に交点の座標を最後まで求めなくても、交点の個数だけを判断できる。

同じ円 $x^2 + y^2 = 25$ に対し、直線の高さだけを変えた次の 3 図を比べる。円の中心は原点、半径は 5 である。座標軸は同じ縮尺・同じ範囲で描いている。

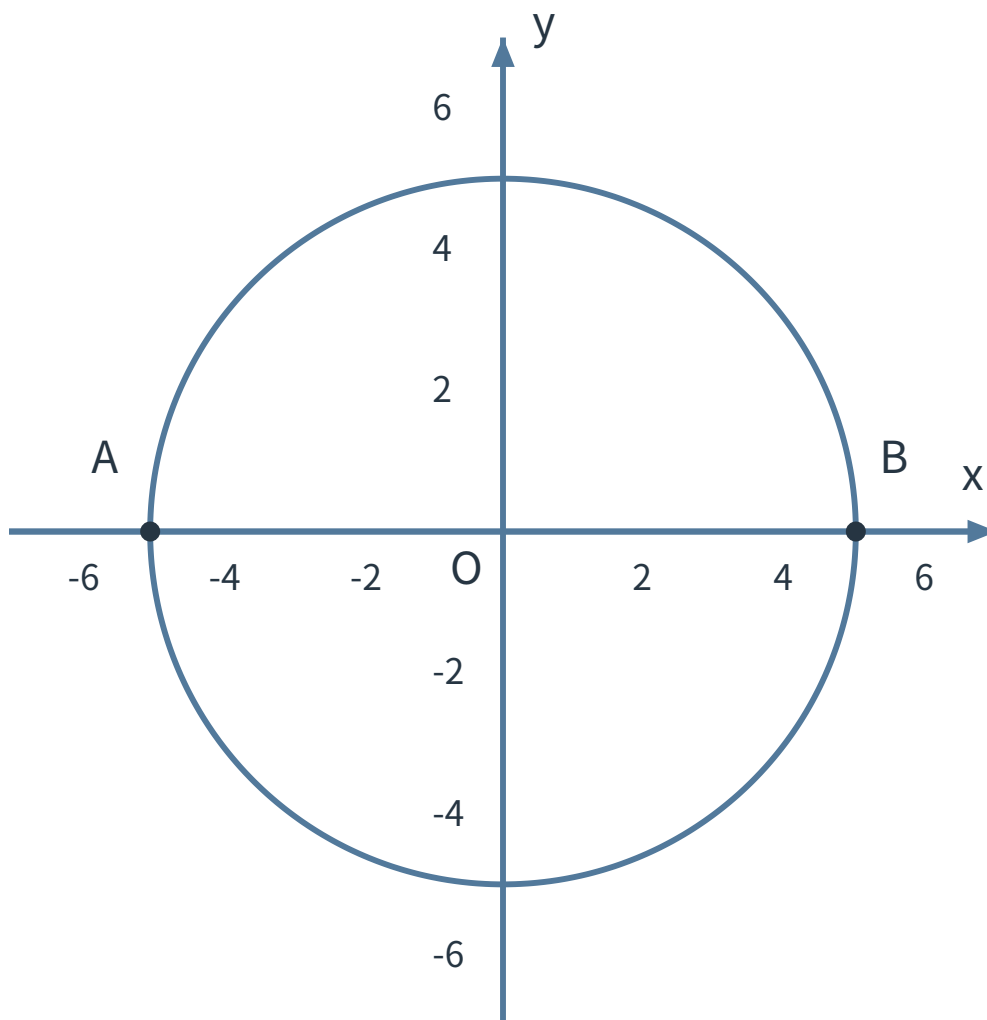


図 2 円と直線 $y=0$: 2 点で交わる

$y = 0$ を円へ代入すると $x^2 = 25$ となり、図の $A(-5, 0)$ 、 $B(5, 0)$ の 2 点が共通点である。

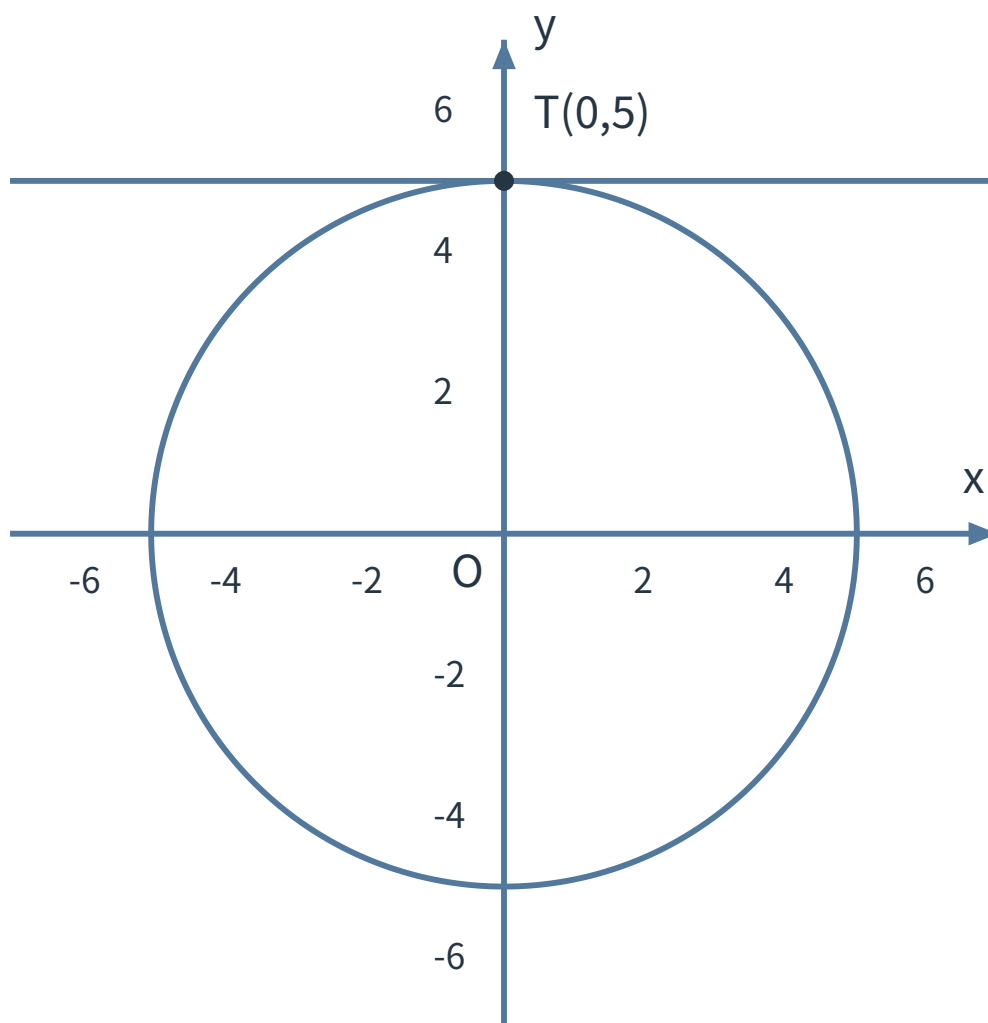


図3 円と直線 $y=5$: 1点で接する

$y = 5$ を円へ代入すると $x^2 = 0$ となり、図の $T(0,5)$ だけが共通点である。

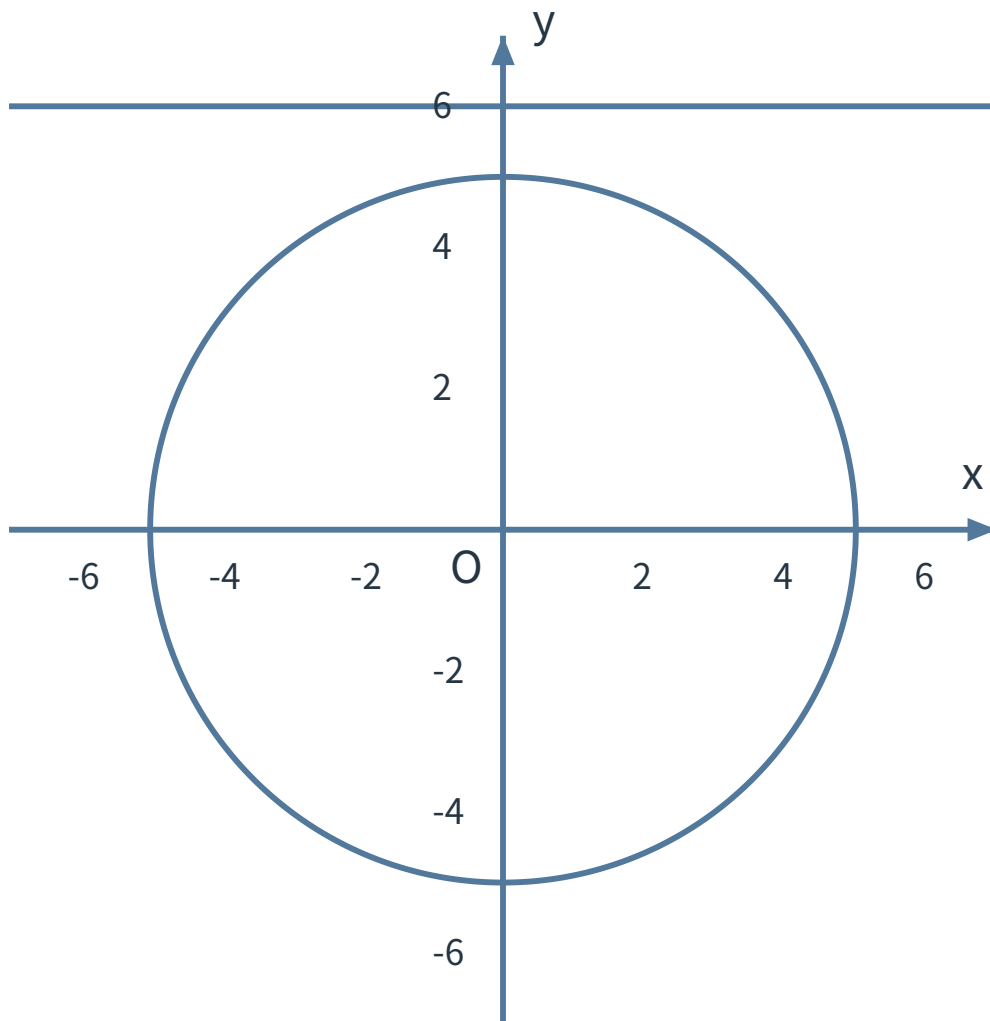


図4 円と直線 $y=6$ ：共通点がない

$y=6$ を円へ代入すると $x^2 = -11$ となり、実数の共通点はない。同じ円で直線を上に動かすと、共通点が2個から1個、0個へ変わることを図と式で対応させる。

接する条件

円と直線が接するとは、共通点がちょうど1個であることを意味する。
したがって、直線を円へ代入して得られる二次方程式について

$$D = 0$$

となることが接する条件である。

交点を求めるときの注意

二次方程式を解いて x の値を求めただけでは、交点の座標を求めたことにはならない。

交点を問われた場合は、求めた x を直線の式へ代入し、 y も求める必要がある。

また、 $x = p$ のような縦の直線は $y = mx + n$ の形にはできない。この場合は円の式へ $x = p$ を直接代入し、 y を求めればよい。

3. 例題

例題 1：2 点で交わる円と直線

円 $x^2 + y^2 = 25$ と直線 $y = x + 1$ の交点を求めよ。

例題 1 の解答・解説

直線の式 $y = x + 1$ を円の式へ代入する。

$$x^2 + (x + 1)^2 = 25$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 25$$

$$2x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

$$(x + 4)(x - 3) = 0$$

したがって、 $x = -4, 3$ である。

直線 $y = x + 1$ へ戻す。

$x = -4$ のとき、 $y = -3$ である。

$x = 3$ のとき、 $y = 4$ である。

よって、交点は $(-4, -3)$ と $(3, 4)$ である。

検算すると、

$$(-4)^2 + (-3)^2 = 16 + 9 = 25$$

であり、 $-3 = -4 + 1$ も成り立つ。

また、

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

であり、 $4 = 3 + 1$ も成り立つ。

どちらの点も円と直線の両方の式を満たしている。

例題 2：交点があるかを判別式で判断する

円 $x^2 + y^2 = 4$ と直線 $y = x + 3$ の位置関係を調べよ。

例題 2 の解答・解説

直線の式を円の式へ代入する。

$$x^2 + (x + 3)^2 = 4$$

$$x^2 + x^2 + 6x + 9 = 4$$

$$2x^2 + 6x + 5 = 0$$

この二次方程式の判別式は

$$D = 6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5$$

$$= 36 - 40$$

$$= -4$$

である。

$D < 0$ なので、実数解は存在しない。

したがって、円と直線は交わらない。

例題 3：接するように定数を決める

円 $x^2 + y^2 = 10$ と直線 $y = 3x + k$ が接するとき、定数 k の値と接点を求めよ。

例題 3 の解答・解説

直線 $y = 3x + k$ を円の式へ代入する。

$$x^2 + (3x + k)^2 = 10$$

$$x^2 + 9x^2 + 6kx + k^2 = 10$$

$$10x^2 + 6kx + k^2 - 10 = 0$$

円と直線が接するので、この二次方程式の実数解は 1 個である。したがって、判別式を 0 とする。

$$D = (6k)^2 - 4 \cdot 10(k^2 - 10)$$

$$= 36k^2 - 40k^2 + 400$$

$$= 400 - 4k^2$$

よって、

$$400 - 4k^2 = 0$$

$$k^2 = 100$$

となるので、 $k = 10, -10$ である。

$k = 10$ のとき、

$$10x^2 + 60x + 90 = 0$$

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$(x + 3)^2 = 0$$

より、 $x = -3$ である。直線 $y = 3x + 10$ へ代入すると $y = 1$ なので、接点は $(-3, 1)$ である。

$k = -10$ のとき、

$$10x^2 - 60x + 90 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x - 3)^2 = 0$$

より、 $x = 3$ である。直線 $y = 3x - 10$ へ代入すると $y = -1$ なので、接点は $(3, -1)$ である。

実際に $(-3, 1)$ と $(3, -1)$ はともに $x^2 + y^2 = 10$ を満たす。

したがって、 $k = 10$ のとき接点は $(-3, 1)$ 、 $k = -10$ のとき接点は $(3, -1)$ である。

4. 演習問題

演習 1

円 $x^2 + y^2 = 13$ と直線 $y = x + 1$ の交点を求めよ。

演習 2

円 $x^2 + y^2 = 9$ と直線 $y = 2x + 7$ の位置関係を調べよ。

演習 3

円 $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$ と直線 $y=2$ の交点を求めよ。

演習 4

円 $x^2 + y^2 = 5$ と直線 $y = x + k$ が接するとき、定数 k の値と接点を求めよ。

演習 5

円 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ と直線 $x=4$ の位置関係を調べ、共通点があればその座標を求めよ。

演習 6

円 $x^2 + y^2 = 25$ と直線 $y = t$ を考える。実数 t の値によって、円と直線の交点の個数を分類せよ。

5. 演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

直線 $y = x + 1$ を円へ代入する。

$$x^2 + (x+1)^2 = 13$$

$$2x^2 + 2x + 1 = 13$$

$$2x^2 + 2x - 12 = 0$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x+3)(x-2) = 0$$

したがって、 $x = -3, 2$ である。

直線 $y = x + 1$ へ代入すると、 $x = -3$ のとき $y = -2$ 、 $x = 2$ のとき $y = 3$ である。

よって、交点は $(-3, -2)$ と $(2, 3)$ である。

検算すると、

$$(-3)^2 + (-2)^2 = 9 + 4 = 13$$

および

$$2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$$

となり、どちらも円の式を満たす。また、両方の点で $y = x + 1$ も成り立つ。

演習 2 の解答・解説

直線 $y = 2x + 7$ を円へ代入する。

$$\begin{aligned}x^2 + (2x + 7)^2 &= 9 \\x^2 + 4x^2 + 28x + 49 &= 9 \\5x^2 + 28x + 40 &= 0\end{aligned}$$

判別式を計算する。

$$\begin{aligned}D &= 28^2 - 4 \cdot 5 \cdot 40 \\&= 784 - 800 \\&= -16\end{aligned}$$

$D < 0$ なので実数解は存在しない。
したがって、円と直線は交わらない。

演習 3 の解答・解説

直線 $y = 2$ を円の式へ代入する。

$$\begin{aligned}(x - 2)^2 + (2 + 1)^2 &= 16 \\(x - 2)^2 + 9 &= 16 \\(x - 2)^2 &= 7\end{aligned}$$

したがって、

$$x = 2 + \sqrt{7}, 2 - \sqrt{7}$$

である。

どちらの場合も $y = 2$ なので、交点は $(2 + \sqrt{7}, 2)$ と $(2 - \sqrt{7}, 2)$ である。
検算では $x - 2 = \sqrt{7}$ または $x - 2 = -\sqrt{7}$ となるため、どちらも

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 7 + 9 = 16$$

を満たす。

演習 4 の解答・解説

直線 $y = x + k$ を円へ代入する。

$$\begin{aligned}x^2 + (x + k)^2 &= 5 \\2x^2 + 2kx + k^2 - 5 &= 0\end{aligned}$$

円と直線が接するため、判別式は 0 である。

$$\begin{aligned}D &= (2k)^2 - 4 \cdot 2(k^2 - 5) \\&= 4k^2 - 8k^2 + 40 \\&= 40 - 4k^2\end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}40 - 4k^2 &= 0 \\k^2 &= 10\end{aligned}$$

より、 $k = \sqrt{10}, -\sqrt{10}$ である。

$k = \sqrt{10}$ のとき、

$$2x^2 + 2\sqrt{10}x + 5 = 0$$

となる。重解なので、

$$x = -\frac{\sqrt{10}}{2}$$

である。

直線へ代入すると、

$$y = -\frac{\sqrt{10}}{2} + \sqrt{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

である。

よって接点は $\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ である。

同様に、 $k = -\sqrt{10}$ のとき接点は $\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ である。

各接点では、 $x^2 + y^2 = \frac{10}{4} + \frac{10}{4} = 5$ となり、円上にあることも確認できる。

演習 5 の解答・解説

直線は $x = 4$ であるため、 x を円の式へ直接代入する。

$$(4 - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

$$9 + (y + 2)^2 = 9$$

$$(y + 2)^2 = 0$$

したがって、 $y = -2$ である。

共通点は $(4, -2)$ の 1 個だけなので、直線 $x = 4$ は円に接する。

実際に、

$$(4 - 1)^2 + (-2 + 2)^2 = 9$$

となり、接点 $(4, -2)$ は円上にある。

演習 6 の解答・解説

直線 $y = t$ を円へ代入する。

$$x^2 + t^2 = 25$$

$$x^2 = 25 - t^2$$

交点の個数は、右辺 $25 - t^2$ の符号で決まる。

$25 - t^2 > 0$ のとき、 x は異なる 2 個の実数値をもつ。これは $-5 < t < 5$ のときである。したがって、交点は 2 個である。

$25 - t^2 = 0$ のとき、 $x = 0$ の 1 個だけである。これは $t = -5$ または $t = 5$ のときであり、直線は円に接する。

$25 - t^2 < 0$ のとき、実数 x は存在しない。これは $t < -5$ または $t > 5$ のときであり、交点はない。したがって、 $-5 < t < 5$ では交点が 2 個、 $t = -5, 5$ では交点が 1 個、 $t < -5$ または $t > 5$ では交点が 0 個である。