第 232 講 平面図形の条件をベクトルへ変える

学習目標

- 平行、垂直、長さが等しいという図形の条件を、ベクトルの式に直せる。
- 位置ベクトルの差を使って、点と点を結ぶベクトルを正しく表せる。
- 図形の性質をベクトルの等式や内積の式に変え、未知数を求められる。
- 平行四辺形や垂直二等分線の条件を、複数の方法で説明できる。

1. 図形の言葉をベクトルの式へ移す

点を結ぶベクトルは位置ベクトルの差

原点を O とし、点 A, B, P, Q の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{p}, \vec{q}$ とする。このとき、終点の位置ベクトルから始点の位置ベクトルを引くことで

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}, \qquad \overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p}$$

と表せる。

まず向きのある量に直す

平面図形の条件は、点、直線、長さ、角について述べられている。そのままでは計算しにくいため、関係する 2 点を結ぶベクトルに直す。例えば、AB と CD が平行なら $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ を比べ、AP と BP が等しいなら $\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{BP}$ の大きさを比べる。
変換の入口は次の 3 種類である。

- 平行や一直線上：一方が他方の実数倍
- 垂直：内積が 0
- 長さが等しい：大きさの 2 乗が等しい

大きさの 2 乗は $|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$ であるため、平方根を使わずに成分計算へ進める。

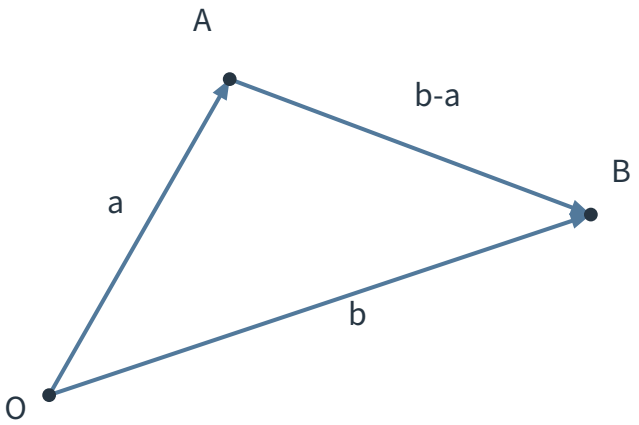

図 1　位置ベクトルの差で点 A から点 B へのベクトルを作る

式を作る前の 3 段階

図形条件を読むときは、(1)比べる 2 本の線分を選ぶ、(2)向きを決めてベクトルにする、(3)平行・垂直・等長のどの式を使うか選ぶ、の順に進める。向きを反対にしても、平行、垂直、長さの条件そのものは変わらない。

例題 1：図形条件を式に直す

点 $A(1,2)$、$B(5,4)$、$P(x,y)$ とする。次の条件を x,y の式で表せ。
(1) $AP \parallel AB$ (2) $AP \perp AB$ (3) $AP = BP$

例題 1 の解答・解説

$\overrightarrow{AB} = (4,2)$、$\overrightarrow{AP} = (x-1, y-2)$、$\overrightarrow{BP} = (x-5, y-4)$ である。
(1) 線分 AP が方向をもつため $P \neq A$ である。平行条件より、ある 0 でない実数 t を用いて

$$(x-1, y-2) = t(4,2)$$

と表せる。成分から $x-1 = 4t, y-2 = 2t$ であり、$x - 2y + 3 = 0$ かつ $(x,y) \neq (1,2)$ としてもよい。
(2) 線分 AP が方向をもつため $P \neq A$ である。垂直条件より

$$(x-1, y-2) \cdot (4,2) = 0$$

である。したがって $4(x-1) + 2(y-2) = 0$、すなわち $2x + y - 4 = 0$ かつ $(x,y) \neq (1,2)$ である。
(3) 2 乗して比較すると

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-5)^2 + (y-4)^2$$

となる。整理すると $2x + y - 9 = 0$ である。

2. 平行・一直線上・垂直を式にする

方向を比べる 2 つの条件

$\vec{u}, \vec{v}$ を零ベクトルでないベクトルとする。
$\vec{u} \parallel \vec{v}$ であることと、$\vec{u} = k\vec{v}$ となる実数 k があることは同値である。

$$\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$A \neq B$ とする。このとき、3 点 A, B, P が一直線上にあることは、$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ となる実数 t があることと同値である。$0 \leq t \leq 1$ も成り立つとき、P は線分 AB 上にある。

実数倍の符号と大きさにも意味がある

$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ で、$t > 0$ なら A から見た P と B は同じ向き、$t < 0$ なら反対向きにある。$0 < t < 1$ なら P は A と B の間、$t > 1$ なら B を越えた位置にある。平行という情報だけで終わらず、係数 t を読むと点の位置まで分かる。
一方、垂直条件では向きの倍率ではなく内積を使う。成分で $\vec{u} = (u_1, u_2)$、$\vec{v} = (v_1, v_2)$ なら、$u_1v_1 + u_2v_2 = 0$ が 1 本の方程式になる。

©ミライコーチング

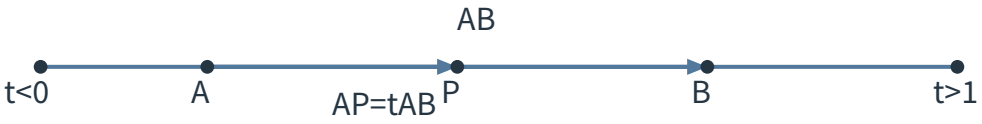

図 2　実数倍 t による一直線上の点 P の位置

平行条件で零ベクトルを混ぜない

零ベクトルには方向がない。$A=B$ や $A=P$ の可能性がある問題では、単に「実数倍だから平行」と結論づける前に、比較する線分が長さ 0 でないことを確認する。3 点の一直線上という判定では $P=A$ や $P=B$ も含まれる。

例題 2：平行と垂直から未知数を求める

$A(0,1)$、$B(4,3)$、$P(2,s)$、$Q(t,5)$ とする。
(1) A,P,B が一直線上にあるとき、s を求めよ。 (2) $AB\perp AQ$ であるとき、t を求めよ。

例題 2 の解答・解説

$\overrightarrow{AB}=(4,2)$ である。
(1) $\overrightarrow{AP}=(2,s-1)$ であり、$\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}$ とおく。第 1 成分から $2=4k$ より $k=\frac{1}{2}$ である。したがって $s-1=2\cdot\frac{1}{2}=1$ より、$s=2$ である。
(2) $\overrightarrow{AQ}=(t,4)$ である。垂直条件から

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ}=4t+2\cdot 4=0$$

である。よって $t=-2$ である。

3. 等しい長さを内積の式にする

等長条件のベクトル表示

2 本の線分の長さが等しいことは、対応するベクトルの大きさの 2 乗が等しいことと同値である。

$$AB=CD \quad\Leftrightarrow\quad \left(\vec{b}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=\left(\vec{d}-\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{d}-\vec{c}\right)$$

垂直二等分線の条件が一次式になる理由

$A\neq B$ とする。$PA=PB$ は、点 P が線分 AB の垂直二等分線上にある条件である。中点を M とすると

$$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MA},\qquad \overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MB}$$

で、$\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MA}$ である。両辺の大きさの 2 乗を比べると、共通する $|\overrightarrow{PM}|^2$ と $|\overrightarrow{MA}|^2$ が消え、

$$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{MA}=0$$

が得られる。$P\neq M$ なら $PM\perp AB$ であり、$P=M$ なら P は中点そのものである。座標で 2 次式を展開したときに x^2, y^2 が消えて一次式になるのも、同じ理由による。

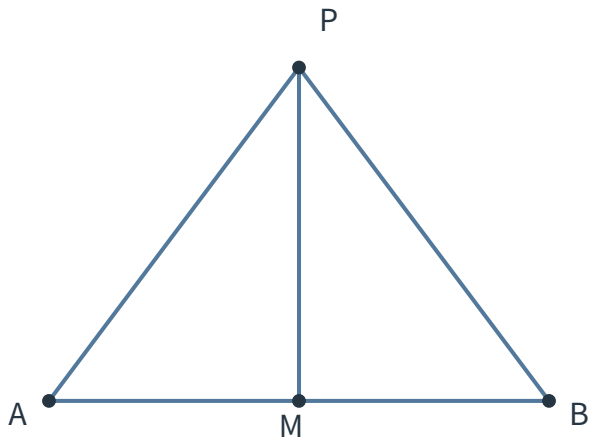

図 3　PA と PB が等しい点 P と線分 AB の中点 M

例題 3：垂直二等分線の方程式

$A(-1,2)$、$B(5,4)$ から等距離にある点 $P(x,y)$ の条件を求めよ。また、その直線が AB に垂直で、AB の中点を通ることを確かめよ。

例題 3 の解答・解説

$PA=PB$ を 2 乗して

$$(x+1)^2+(y-2)^2=(x-5)^2+(y-4)^2$$

とする。展開して整理すると

$$3x+y-9=0$$

である。この直線の方向ベクトルとして $(1,-3)$ を選べる。一方、$\overrightarrow{AB}=(6,2)$ であり、$(1,-3)\cdot(6,2)=6-6=0$ だから両者は垂直である。
AB の中点は $M(2,3)$ であり、$3\cdot 2+3-9=0$ を満たす。よって、この直線は AB の垂直二等分線である。

4. 平行四辺形の条件を選び分ける

平行四辺形を表す 3 つのベクトル条件

四角形 $ABCD$ の頂点がこの順に並び、4 点が退化していないとする。次のどの条件も、$ABCD$ が平行四辺形であることと同値である。

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC},$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC},$$

$$\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$$

最後の式は、対角線 AC と BD の中点が一致することを表す。

条件に合う式を選ぶ

辺の向きが与えられているときは $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ が直接的である。対角線や未知の頂点を扱うときは $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$ が計算しやすい。
例えば、A, B, C が分かっていて $ABCD$ を平行四辺形にしたいなら、

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$$

と一度に求められる。ただし「3 点を頂点にもつ平行四辺形の第 4 頂点」は、頂点の並べ方によって 3 通りある。どの点が A, B, C, D のどの役割かを先に確認する。

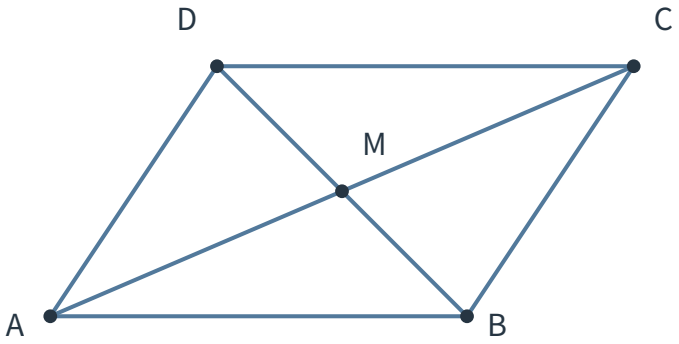

図 4　対角線が同じ中点 M をもつ平行四辺形 ABCD

例題 4：平行四辺形の未知の頂点

$A(1, 0)$、$B(5, 1)$、$C(7, 4)$ とする。四角形 $ABCD$ がこの順に平行四辺形となるように、点 D の座標を求めよ。また、2 本の対角線の中点が一致することを確かめよ。

例題 4 の解答・解説

平行四辺形の条件 $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$ から

$$\vec{d}=\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}=(1,0)+(7,4)-(5,1)=(3,3)$$

である。したがって $D(3,3)$ である。
AC の中点は $(4,2)$、BD の中点も

$$\left(\frac{5+3}{2},\frac{1+3}{2}\right)=(4,2)$$

で一致する。よって、対角線は互いに二等分し合う。

5. 演習問題

演習 1：一直線上の条件

$A(-1,2)$、$B(5,5)$、$P(3,t)$ が一直線上にあるとき、t を求めよ。さらに、P が線分 AB 上にあるか答えよ。

演習 2：平行条件

$A(1,-1)$、$B(4,5)$、$C(-2,3)$、$D(s,9)$ とする。$AB \parallel CD$ となる s を求めよ。

演習 3：垂直条件

$A(0,0)$、$B(3,2)$、$C(1,4)$、$D(k,1)$ とする。$AB \perp CD$ となる k を求めよ。

演習 4：等距離の点

$A(2,-1)$、$B(6,3)$ から等距離にある点 $P(x,y)$ の条件を求めよ。

演習 5：二等辺三角形の頂点

$A(-2,0)$、$B(4,0)$、$C(1,t)$ とする。$CA=CB$ を満たすことを確かめ、この条件だけでは t が定まらない理由を説明せよ。ただし三角形が退化しないものとする。

演習 6：平行四辺形の頂点

$A(-1,1)$、$B(3,0)$、$C(5,4)$ とする。四角形 $ABCD$ がこの順に平行四辺形となる点 D を求めよ。

演習 7：長方形であることの証明

$A(0,0)$、$B(4,1)$、$C(3,5)$、$D(-1,4)$ とする。ベクトルを用いて、四角形 $ABCD$ が長方形であることを示せ。

©ミライコーチング

演習 8：対角線と平行四辺形

退化していない四角形 $ABCD$ の対角線 AC と BD の中点が一致するとする。位置ベクトルを用いて $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ を示し、$ABCD$ が平行四辺形であることを説明せよ。

演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

$\overrightarrow{AB}=(6,3)$、$\overrightarrow{AP}=(4,t-2)$ である。$\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}$ とおくと、第 1 成分から $4=6k$ より $k=\frac{2}{3}$ である。したがって $t-2=3\cdot\frac{2}{3}=2$ より $t=4$ である。
$0<\frac{2}{3}<1$ であるから、P は線分 AB 上にある。

演習 2 の解答・解説

$\overrightarrow{AB}=(3,6)$、$\overrightarrow{CD}=(s+2,6)$ である。平行条件から $\overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{AB}$ とおく。第 2 成分から $6=6k$ より $k=1$ である。よって $s+2=3$ となり、$s=1$ である。

演習 3 の解答・解説

$\overrightarrow{AB}=(3,2)$、$\overrightarrow{CD}=(k-1,-3)$ である。垂直条件から

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=3(k-1)+2(-3)=0$$

である。したがって $3k-9=0$ より、$k=3$ である。

演習 4 の解答・解説

$PA=PB$ の 2 乗を比べる。

$$(x-2)^2+(y+1)^2=(x-6)^2+(y-3)^2$$

展開して整理すると $x+y-5=0$ である。これは AB の中点 $(4,1)$ を通り、$\overrightarrow{AB}=(4,4)$ に垂直な直線である。

演習 5 の解答・解説

$\overrightarrow{CA}=(-3,-t)$、$\overrightarrow{CB}=(3,-t)$ である。したがって

$$|\,\overrightarrow{CA}\,|^2=9+t^2,\qquad |\,\overrightarrow{CB}\,|^2=9+t^2$$

となり、t の値にかかわらず $CA=CB$ である。ただし $t=0$ では 3 点が一直線上となるため、退化しない三角形では $t\neq 0$ である。点 C は AB の垂直二等分線 $x=1$ 上を動けるので、等長条件だけでは点 C の y 座標 t（したがって高さ $|\,t\,|$）は定まらない。

演習 6 の解答・解説

$\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$ を用いると

$$\vec{d}=\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}=(-1,1)+(5,4)-(3,0)=(1,5)$$

である。よって $D(1,5)$ である。

演習 7 の解答・解説

各辺のベクトルは

$$\overrightarrow{AB} = (4,1), \quad \overrightarrow{DC} = (4,1), \qquad \overrightarrow{AD} = (-1,4), \quad \overrightarrow{BC} = (-1,4)$$

である。向かい合う辺のベクトルがそれぞれ等しいため、$ABCD$ は平行四辺形である。さらに

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 4(-1) + 1 \cdot 4 = 0$$

であるから、隣り合う辺は垂直である。よって $ABCD$ は長方形である。

演習 8 の解答・解説

対角線の中点が一致するので

$$\frac{\vec{a} + \vec{c}}{2} = \frac{\vec{b} + \vec{d}}{2}$$

である。したがって $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$ であり、移項すると

$$\vec{b} - \vec{a} = \vec{c} - \vec{d}$$

となる。左辺は $\overrightarrow{AB}$、右辺は $\overrightarrow{DC}$ であるから、$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ である。よって一組の向かい合う辺は平行で長さも等しく、$ABCD$ は平行四辺形である。

©ミライコーチング