

第 117 講 指数法則

学習目標

この講では、正の数を底とする指数計算について、次のことができるようになることを目標とする。

- ・ 同じ底をもつ累乗の積や商で、指数をどのように整理するか判断できる。
- ・ 累乗の累乗、積の累乗、商の累乗の法則を使い分けられる。
- ・ 指数法則が成り立つ条件を理解し、使ってはいけない式を見分けられる。

指数法則を考える出発点

指数法則は、指数を単なる計算記号として扱うのではなく、「同じ数を何回掛けるか」を表す考えから生まれる。

例えば、正の整数指数では $2^3 = 2 \times 2 \times 2$ であり、 2^5 と掛けると $2^3 \times 2^5 = (2 \times 2 \times 2)(2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2)$ となる。

これは 2 を合計 8 個掛けた式なので、 2^8 と表せる。この考えから、同じ底の積では指数を足すという法則が生まれる。

第 116 講では、有理数指数を正の数に対して定義した。有理数指数でも、この「整数指数の計算と矛盾しないようにする」という考え方を引き継ぐことで指数法則を広げられる。

今回扱う条件は、底 $a, b > 0$ 、指数 r, s は有理数である。

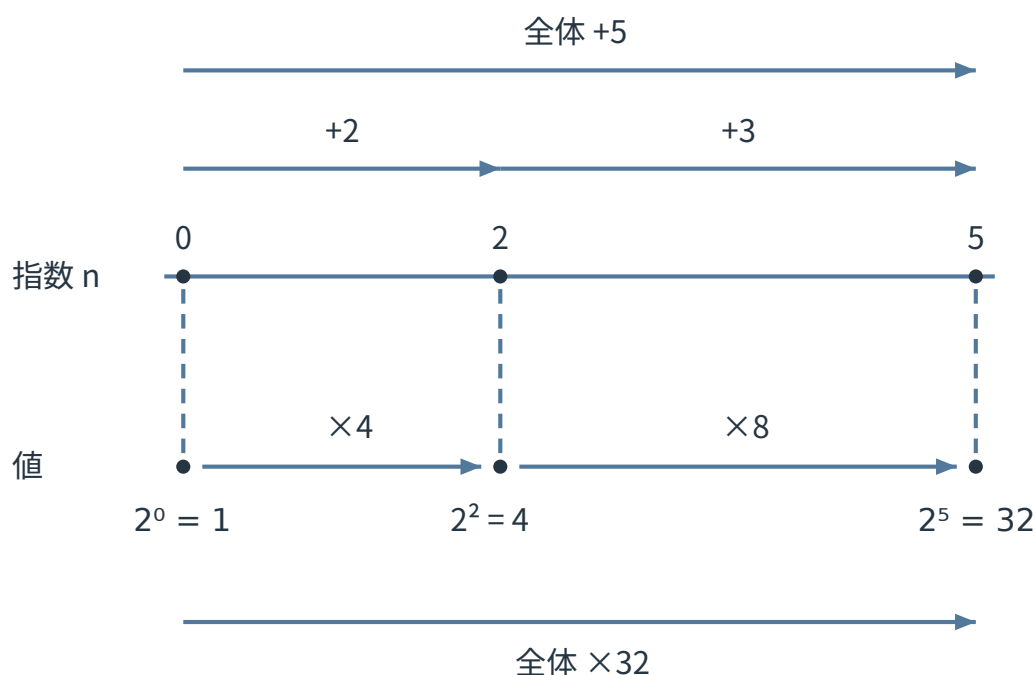


図 1 上段は指数 n 、下段は対応する値。 $2^2 \times 2^3 = 2^{(2+3)} = 2^5$ ：値の積に、指数の和が対応する。

この図は、整数指数の具体例として、指数の変化と値の変化の対応を示している。

指数が 0 から 2 になると指数は +2 増え、 $2^0 = 1$ から $2^2 = 4$ へ値は $\times 4$ になる。さらに指数が 2 から 5 になると指数は +3 増え、 $2^2 = 4$ から $2^5 = 32$ へ値は $\times 8$ になる。

全体では指数が+5され、値は $\times 32$ になっている。これは、 $2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$ という同じ底の積で指数を足す法則を表している。

ただし、この図は整数指数の繰返しを利用した具体例である。有理数指数全体で同じ法則が成り立つことは、この図だけで証明しているのではなく、共通の根に戻す議論によって確認する。

一方で、指数法則はすべての式に使えるわけではない。指数が付いた項どうしても、足し算や和全体には同じ考え方を適用できない。

指数法則の基本

底 a, b を正の数、指数 r, s を有理数とする。このとき、次の 5 つの法則が成り立つ。

同じ底の積： $a^r \times a^s = a^{r+s}$

同じ底の商： $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

累乗の累乗： $(a^r)^s = a^{rs}$

積の累乗： $(ab)^r = a^r b^r$

商の累乗： $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

ただし、これらは $a, b > 0$ という条件のもとで考える。正の底であれば、有理数指数を根号として定義したときにも値が一意に定まり、指数計算の結果が矛盾しない。

指数を足す理由

同じ底の積で指数を足す理由は、指数を「同じ底を何回まとめて掛けるか」と考えたとき、整数指数の法則と一致するからである。

有理数指数でも、この構造が保たれることを確認する。 $a > 0$ とし、 r, s を有理数とする。

共通分母となる正整数 N を用いて、 $r = \frac{m}{N}$ 、 $s = \frac{p}{N}$ と表す。ただし、 m, p は整数とする。

a の正の N 乗根を t とおくと、 $a^{\frac{m}{N}} = t^m$ 、 $a^{\frac{p}{N}} = t^p$ である。

したがって、 $t^m t^p = t^{m+p}$ となる。ここで使っているのは、正・0・負の整数指数に対して成り立つ整数指数の法則である。

よって、次のように計算する。

$$\begin{aligned} a^r a^s &= t^m t^p \\ &= t^{m+p} \\ &= a^{\frac{m+p}{N}} \\ &= a^{r+s} \end{aligned}$$

となり、有理数指数でも同じ底の積では指数を足す法則が成り立つ。

同じ底の商については、 $a > 0$ なので $a^s > 0$ であり、逆数を考えられる。

$\frac{a^r}{a^s} = a^r \cdot \frac{1}{a^s}$ である。指数の逆数の関係から $\frac{1}{a^s} = a^{-s}$ となるため、 $a^r a^{-s} = a^{r-s}$ となる。

累乗の累乗と積・商の累乗

累乗の累乗では、指数を掛ける。この理由も、有理数指数を根号の定義へ戻して考えることで確認できる。

$a > 0$ とし、 r, s を有理数とする。

$r = \frac{m}{n}$ 、 $s = \frac{p}{q}$ と表す。ただし、 m, p は整数、 n, q は正整数である。

a の正の nq 乗根を u とすると、 $a^r = u^{mq}$ となる。

また、 a^r の正の q 乗根を考える。

$u > 0$ なので、 $u^m > 0$ である。また、整数指数の法則より、 $(u^m)^q = u^{mq}$ となる。

ここで、 u は a の正の nq 乗根として取っているため、 $u^{mq} = a^{\frac{m}{n}} = a^r$ である。

したがって、 u^m は a^r の正の q 乗根の条件を満たす。正の根は一意に定まるため、 a^r の正の q 乗根は u^m であると判断できる。

$(a^r)^s = (u^m)^p$ となる。

整数指数の法則より、 $(u^m)^p = u^{mp}$ である。

一方、 $u^{mp} = a^{m \frac{p}{nq}}$ なので、 $a^{m \frac{p}{nq}} = a^{rs}$ となる。

したがって、 $(a^r)^s = a^{rs}$ が成り立つ。

積の累乗では、 $a, b > 0$ とし、 $r = \frac{k}{N}$ とする。ただし、 k は整数、 N は正整数である。

a, b の正の N 乗根をそれぞれ v, w とすると、 $v^N = a$, $w^N = b$ である。

このとき、 $(vw)^N = v^N w^N = ab$ となる。さらに $v, w > 0$ なので、 $vw > 0$ である。

したがって、 vw は ab の正の N 乗根である。

したがって、次のように計算する。

$$\begin{aligned}(ab)^r &= (vw)^k \\ &= v^k w^k \\ &= a^r b^r\end{aligned}$$

商の累乗も同様に、 $\frac{a}{b}$ を用いることで、 $(\frac{a}{b})^r = \frac{a^r}{b^r}$ が成り立つ。

これらの法則は、根号の定義と整数指数の計算が矛盾しないように広げた結果である。

指数法則を使う条件

指数法則は、式の形が合っている場合にだけ使える。

例えば、 $a^r + a^s = a^{r+s}$

や $(a+b)^r = a^r + b^r$ は、一般に成り立つ恒等式ではない。

足し算に指数の加法を使うことはできない。実際に、 $2^2 + 2^3 = 4 + 8 = 12$ であるが、 $2^5 = 32$ なので一致しない。

また、 $(1+2)^2 = 9$ である一方、 $1^2 + 2^2 = 5$ であり、和全体に指数を分配することもできない。

ただし、特定の値では偶然等しくなる場合がある。したがって、これらの式が「どの値でも絶対に等しくならない」という意味ではなく、「一般的な法則として使えない」という意味である。

0 指数と負指数

正の底 a に対して、0 指数と負指数も指数法則と矛盾しないように定められる。

同じ底の商の法則から、 $\frac{a^r}{a^r} = a^{r-r} = a^0$ である。一方、左辺は1なので、 $a^0 = 1$ となる。

また、 $a^r \times a^{-r} = a^0 = 1$ より、 $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$ となる。

ここで注意することは、正の底という条件のもとで扱っていることである。負の底を含む式へ有理数指数の法則を無条件に広げることにはできない。

ただし、整数指数だけの場合は、負の底でも通常の累乗として扱える場合がある。また、0の正の整数指数まで禁止するという意味ではない。条件を分けて考えることが重要である。

積と累乗の累乗を見分ける

指数計算では、指数を足すのか掛けるのかを式の構造から判断する必要がある。

同じ底の積では、指数を足す。

$$\begin{aligned}4^{\frac{1}{2}} \times 4^2 &= 4^{\frac{1}{2}+2} \\ &= 4^{\frac{5}{2}} \\ &= 32\end{aligned}$$

一方、累乗の累乗では、外側の指数を内側の指数に掛ける。

$$\begin{aligned}\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^2 &= 4^{\left(\frac{1}{2}\right) \times 2} \\ &= 4\end{aligned}$$

前者は2つの累乗を掛け合わせているため指数の和になり、後者は1つの累乗をさらに累乗しているため指数の積になる。

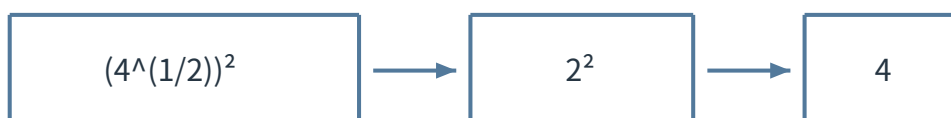
式の形を確認せず、どちらも指数を足すと考えてはいけない。

積：指数を足す



指数： $1/2 + 2 = 5/2$

累乗の累乗：指数を掛ける



指数： $(1/2) \times 2 = 1$

図2 上：同じ底の積では指数を足す。下：累乗の累乗では指数を掛ける。 $4^{(1/2)}$ は指数が $1/2$ であることを表す。

指数を整理する順序

指数計算では、次の順序で式を見るとよい。

1. 底が同じ項を探す。
2. 掛け算なら指数の加法、割り算なら指数の減法を使う。
3. 累乗が重なっていれば指数の積にする。
4. 積や商全体に指数が付いていれば、それぞれへ分配する。

底をそろえる必要がある場合は、先に同じ数の累乗として表せる形へ変形する。

例題 1

$2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{3}{2}} \div 2^{-1}$ を求めなさい。

例題 1 の解答・解説

底がすべて 2 でそろっているため、指数をまとめる。

$$\begin{aligned} 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{3}{2}} \div 2^{-1} &= 2^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - (-1)} \\ &= 2^{2+1} \\ &= 2^3 \\ &= 8 \end{aligned}$$

掛け算では指数を足し、割り算では指数を引く。ここで割る数の指数は -1 なので、指数計算では $-(-1)$ になることに注意する。
したがって、答えは 8 である。

例題 2

$8^{\frac{2}{3}} \times 4^{-\frac{1}{2}}$ を簡単にしなさい。

例題 2 の解答・解説

底を 2 にそろえる。

$8 = 2^3$ 、 $4 = 2^2$ なので、次のように計算する。

$$\begin{aligned} 8^{\frac{2}{3}} \times 4^{-\frac{1}{2}} &= (2^3)^{\frac{2}{3}} \times (2^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= 2^2 \times 2^{-1} \\ &= 2^{2-1} \\ &= 2 \end{aligned}$$

根号を使って確認すると、 $8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2$ であり、 $4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$ だから、積は $4 \times \frac{1}{2} = 2$ となる。
底をそろえる方法と根から考える方法が一致することで、有理数指数の法則が確認できる。

例題 3

$a, b > 0$ のとき、 $\frac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}}{a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{2}{3}}}$ を簡単にしなさい。

例題 3 の解答・解説

底ごとに指数を整理する。

$$\begin{aligned} \frac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}}{a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{2}{3}}} &= a^{\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2})} b^{\frac{1}{3} - (-\frac{2}{3})} \\ &= a^1 b^1 \\ &= ab \end{aligned}$$

指数法則では、同じ底をもつ積の場合にだけ指数の加法 $a^r a^s = a^{r+s}$ を使う。ここでは底 a の指数、底 b の指数をそれぞれ別々に整理している。同じ指数をもつ異なる底の積では、積の累乗の法則によってまとめられる場合もあるため、「異なる底は絶対にまとめられない」と考えてはいけない。
したがって、答えは ab である。

演習問題

指数法則は、式の形を見て適切な法則を選ぶことが重要である。底が同じか、累乗が重なっているか、積や商全体に指数が付いているかを確認して計算する。

演習問題 1

$3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}}$ を簡単にしなさい。

演習問題 2

$\frac{5^{\frac{3}{2}}}{5^{-\frac{1}{2}}}$ を簡単にしなさい。

演習問題 3

$(2^{\frac{1}{3}})^6$ を簡単にしなさい。

演習問題 4

$4^{\frac{1}{2}} \times 4^2$ と $(4^{\frac{1}{2}})^2$ の値をそれぞれ求め、違いを説明しなさい。

演習問題 5

$12^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}}$ を簡単にしなさい。

演習問題 6

$a, b > 0$ のとき、 $\frac{a^{\frac{3}{4}}b^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}}$ を簡単にしなさい。

演習問題 7

次の説明の誤りを訂正しなさい。

「 $2^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} = 2^1$ だから、 $a^r + a^s = a^{r+s}$ がいつでも成り立つ。」

演習問題 8

次の式を指数法則を使って簡単にしなさい。

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{3}}} \right)^2$$

ただし、 $a, b > 0$ とする。

演習問題の解答・解説

演習問題 1 の解答・解説

同じ底 3 の積なので、指数を足す。

$$\begin{aligned}3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} &= 3^{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}} \\&= 3^1 \\&= 3\end{aligned}$$

同じ底の積では、指数部分だけを見て足すことができる。
したがって、答えは 3 である。

演習問題 2 の解答・解説

同じ底 5 の商なので、分母の指数を引く。

$$\begin{aligned}\frac{5^{\frac{3}{2}}}{5^{-\frac{1}{2}}} &= 5^{\frac{3}{2} - (-\frac{1}{2})} \\&= 5^{\frac{4}{2}} \\&= 5^2 \\&= 25\end{aligned}$$

負の指数を引くときは、符号に注意する。
したがって、答えは 25 である。

演習問題 3 の解答・解説

累乗の累乗では指数を掛ける。

$$\begin{aligned}\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^6 &= 2^{(\frac{1}{3}) \times 6} \\&= 2^2 \\&= 4\end{aligned}$$

外側の 6 を指数に掛けることで、根号を含む式を整理できる。
したがって、答えは 4 である。

演習問題 4 の解答・解説

2つの式は似ているが、指数の付き方が異なる。
まず、次のように計算する。

$$\begin{aligned} 4^{\frac{1}{2}} \times 4^2 &= 4^{\frac{1}{2}+2} \\ &= 4^{\frac{5}{2}} \\ &= (2^2)^{\frac{5}{2}} \\ &= 2^5 \\ &= 32 \end{aligned}$$

一方、次のように計算する。

$$\begin{aligned} \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^2 &= 4^{(\frac{1}{2}) \times 2} \\ &= 4^1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

前者は「同じ底の積」なので指数を足し、後者は「累乗の累乗」なので指数を掛けている。形を確認せずに同じ処理をすると誤る。
したがって、 $4^{\frac{1}{2}} \times 4^2 = 32$ 、 $\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 4$ である。

演習問題 5 の解答・解説

異なる底であるが、指数が同じなので積の累乗を利用できる。

$$\begin{aligned} 12^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} &= (12 \times 3)^{\frac{1}{2}} \\ &= 36^{\frac{1}{2}} \\ &= 6 \end{aligned}$$

「異なる底ではまとめられない」と考えるのは誤りである。同じ指数をもつ積では、積の累乗の法則を使える。
したがって、答えは 6 である。

演習問題 6 の解答・解説

a と b の指数をそれぞれ整理する。

$$\begin{aligned} \frac{a^{\frac{3}{4}}b^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}} &= a^{\frac{3}{4}-(-\frac{1}{4})}b^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \\ &= a^1b^{-1} \\ &= \frac{a}{b} \end{aligned}$$

異なる底の指数を一度にまとめるのではなく、 a の指数と b の指数を別々に計算する。
したがって、答えは $\frac{a}{b}$ である。

演習問題 7 の解答・解説

説明の誤りは、足し算に指数法則を適用している点である。

指数法則の $a^r \times a^s = a^{r+s}$ は、掛け算の場合に成り立つ。

例えば、 $2^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} = 2 \times 2^{\frac{1}{2}}$ であり、これは 2^1 ではない。

実際に、 $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ であり、 $2^1 = 2$ なので一致しない。

したがって、 $a^r + a^s = a^{r+s}$ は一般には成り立たない。ただし、特定の値では偶然一致する場合があるため、「どの数でも絶対に等しくならない」という意味ではない。

演習問題 8 の解答・解説

商全体に指数が付いているので、商の累乗の法則を使う。

$$\begin{aligned}\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{3}}}\right)^2 &= \frac{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2}{\left(b^{\frac{1}{3}}\right)^2} \\ &= \frac{a^1}{b^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{a}{b^{\frac{2}{3}}}\end{aligned}$$

分子と分母それぞれに指数を掛けて整理する。

したがって、答えは $\frac{a}{b^{\frac{2}{3}}}$ である。