

第 90 講 座標と 2 点間の距離

学習目標

この講では、次のことができるようになることを目標とする。

- 2 点の座標から、横方向と縦方向の座標の差を読み取れる。
- 横方向と縦方向の長さに三平方の定理を使い、2 点間の距離の公式を導ける。
- 2 点間の距離の公式を使って、基本的な距離を求められる。
- 2 点の x 座標または y 座標が同じ場合の距離を求められる。
- 座標の符号や点の順序に注意して計算できる。

定義と理解

座標の差が横と縦の移動を表す

平面上の 2 点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ の距離を考える。

点 A から点 B へ移るとき、横方向では x_1 から x_2 へ、縦方向では y_1 から y_2 へ移動する。そのため、座標の差は次のようになる。

方向	座標の差	実際の長さ
横方向	$x_2 - x_1$	$x_2 - x_1$ の絶対値
縦方向	$y_2 - y_1$	$y_2 - y_1$ の絶対値

座標の差そのものは負になることがあるが、長さは負にならない。たとえば、 $x_1 = 5$ 、 $x_2 = 2$ なら $x_2 - x_1 = -3$ であるが、横方向の長さは 3 である。

この「横の長さ」と「縦の長さ」を直角三角形の 2 辺と考えることが、2 点間の距離を求める出発点である。

三平方の定理から距離を導く

横と縦の座標差がともに 0 でないとき、2 点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ を結ぶ線分を斜辺とする直角三角形を作れる。

横方向の長さは $|x_2 - x_1|$ 、縦方向の長さは $|y_2 - y_1|$ である。 AB を 2 点間の距離とし、三平方の定理を適用した結果は次の式である。

$$AB^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

絶対値を 2 乗すると符号が消えるため、次の式が成り立つ。

$$|x_2 - x_1|^2 = (x_2 - x_1)^2$$

縦方向も同様なので、2 点間の距離の 2 乗は次のとおりである。

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

距離 AB は負ではないので、平方根をとれば 2 点間の距離が求められる。横または縦の座標差が 0 の場合も、距離は残る差の絶対値であり、同じ公式に一致する。

2 点間の距離

平面上の 2 点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ の間の距離 AB は、次の式で求められる。

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

この公式は、「横の座標差」と「縦の座標差」に三平方の定理を使ったものである。

距離を求める時の手順

2 点間の距離は、次の順に求めるとよい。

1. 2 点の x 座標の差を求める。
2. 2 点の y 座標の差を求める。
3. それぞれを 2 乗する。
4. 2 つを足す。
5. 平方根をとる。

座標の差が負になっても、そのまま 2 乗すればよい。途中で無理に正の値へ直す必要はない。

符号と点の順序に注意する

たとえば $3 - (-2)$ は 5 であり、 $3 - 2$ ではない。負の座標を引くときは、括弧を付けて計算すると安全である。

また、 A から B の座標差を使っても、 B から A の座標差を使っても距離は同じである。差の符号が反転しても 2 乗は変わらない。

$$(x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2$$

ただし、 x 座標では $x_2 - x_1$ 、 y 座標では $y_2 - y_1$ のように、同じ点の順序でそろえることが大切である。

同じ座標をもつ場合

2 点の x 座標が同じなら、横方向の差は 0 である。そのため、距離は縦方向の座標の差の絶対値で求められる。

同様に、2 点の y 座標が同じなら、距離は横方向の座標の差の絶対値で求められる。

距離の公式に代入しても同じ結果になるため、公式と特別な場合を別々に覚える必要はない。

例題

例題 1

2 点 $A(1, 2)$ 、 $B(4, 6)$ の間の距離 AB を求めよ。

例題 1 の解答・解説

x 座標の差は $4 - 1 = 3$ 、 y 座標の差は $6 - 2 = 4$ である。2 点間の距離の公式に代入する。

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(4 - 1)^2 + (6 - 2)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{9 + 16} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

よって、 $AB = 5$ である。

横方向に 3、縦方向に 4 離れているため、辺の長さが 3、4 の直角三角形の斜辺を求めていることになる。

例題 2

2 点 $P(-2, 5)$ 、 $Q(-2, -1)$ の間の距離 PQ を求めよ。

例題 2 の解答・解説

2 点の x 座標はいずれも -2 であるため、横方向には離れていない。

公式に代入した計算を示す。

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{\{-2 - (-2)\}^2 + (-1 - 5)^2} \\ &= \sqrt{0^2 + (-6)^2} \\ &= \sqrt{36} \\ &= 6 \end{aligned}$$

よって、 $PQ = 6$ である。

x 座標が同じ 2 点の距離は、 y 座標の差の大きさに等しい。この場合は 5 と -1 の差が 6 である。

例題 3

2 点 $C(3, -2)$ 、 $D(-1, 2)$ の間の距離 CD を求めよ。

例題 3 の解答・解説

負の数を含むため、座標の差を括弧を使って丁寧に計算する。

$$\begin{aligned} CD &= \sqrt{(-1-3)^2 + \{2-(-2)\}^2} \\ &= \sqrt{(-4)^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{16+16} \\ &= \sqrt{32} \\ &= 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

よって、 $CD = 4\sqrt{2}$ である。

点の順序を逆にすると、座標の差はそれぞれ 4、 -4 となる。しかし 2 乗した値は同じなので、距離は変わらない。

演習問題

演習問題 1

2 点 $A(2, -1)$ 、 $B(8, 7)$ の間の距離 AB を求めよ。

演習問題 2

2 点 $P(-3, 4)$ 、 $Q(2, 0)$ の間の距離 PQ を求めよ。

演習問題 3

2 点 $C(5, -6)$ 、 $D(5, 3)$ の間の距離 CD を求めよ。

演習問題 4

2 点 $E(-7, 2)$ 、 $F(1, 2)$ の間の距離 EF を求めよ。

演習問題 5

2 点 $G(4, 5)$ 、 $H(-2, -3)$ の間の距離 GH を求めよ。

演習問題 6

原点 $O(0, 0)$ と点 $P(-6, 8)$ の間の距離 OP を求めよ。

演習問題 7

3 点 $A(1, 1)$ 、 $B(4, 5)$ 、 $C(-2, 5)$ がある。距離 AB と AC をそれぞれ求めよ。

演習問題の解答・解説

演習問題 1 の解答・解説

2 点 $A(2, -1)$ 、 $B(8, 7)$ について、座標の差を公式に代入する。

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(8-2)^2 + \{7-(-1)\}^2} \\ &= \sqrt{6^2 + 8^2} \\ &= \sqrt{36 + 64} \\ &= \sqrt{100} \\ &= 10 \end{aligned}$$

よって、 $AB = 10$ である。

$7 - (-1) = 8$ のように、負の数を引く計算では符号に注意する必要がある。

演習問題 2 の解答・解説

x 座標の差は $2 - (-3) = 5$ 、 y 座標の差は $0 - 4 = -4$ である。

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{\{2 - (-3)\}^2 + (0 - 4)^2} \\ &= \sqrt{5^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{25 + 16} \\ &= \sqrt{41} \end{aligned}$$

よって、 $PQ = \sqrt{41}$ である。

平方根が整数にならない場合でも、無理に小数へ直さず $\sqrt{41}$ のままでよい。

演習問題 3 の解答・解説

2 点の x 座標はどちらも 5 であるため、横方向の差は 0 である。

$$\begin{aligned} CD &= \sqrt{(5-5)^2 + \{3-(-6)\}^2} \\ &= \sqrt{0^2 + 9^2} \\ &= 9 \end{aligned}$$

よって、 $CD = 9$ である。

x 座標が同じ場合、距離は y 座標の差の大きさになる。

演習問題 4 の解答・解説

2 点の y 座標はどちらも 2 であるため、縦方向の差は 0 である。

$$\begin{aligned} EF &= \sqrt{\{1-(-7)\}^2 + (2-2)^2} \\ &= \sqrt{8^2 + 0^2} \\ &= 8 \end{aligned}$$

よって、 $EF = 8$ である。

y 座標が同じ場合、距離は x 座標の差の大きさになる。

演習問題 5 の解答・解説

負の座標を含むため、引き算を括弧で明確にする。

$$\begin{aligned}GH &= \sqrt{(-2-4)^2 + (-3-5)^2} \\&= \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} \\&= \sqrt{36 + 64} \\&= \sqrt{100} \\&= 10\end{aligned}$$

よって、 $GH = 10$ である。

座標の差がともに負になっているが、距離の公式ではそれぞれを 2 乗するため、距離が負になることはない。

演習問題 6 の解答・解説

原点は $O(0,0)$ である。点 $P(-6,8)$ との距離を公式で求める。

$$\begin{aligned}OP &= \sqrt{(-6-0)^2 + (8-0)^2} \\&= \sqrt{(-6)^2 + 8^2} \\&= \sqrt{36 + 64} \\&= \sqrt{100} \\&= 10\end{aligned}$$

よって、 $OP = 10$ である。

原点から点 (x,y) までの距離も、2 点間の距離の公式をそのまま使えば求められる。

演習問題 7 の解答・解説

まず、 $A(1,1)$ と $B(4,5)$ の距離を求める。

$$\begin{aligned}AB &= \sqrt{(4-1)^2 + (5-1)^2} \\&= \sqrt{3^2 + 4^2} \\&= \sqrt{25} \\&= 5\end{aligned}$$

続いて、 $A(1,1)$ と $C(-2,5)$ の距離を求める。

$$\begin{aligned}AC &= \sqrt{(-2-1)^2 + (5-1)^2} \\&= \sqrt{(-3)^2 + 4^2} \\&= \sqrt{25} \\&= 5\end{aligned}$$

したがって、 $AB = 5$ 、 $AC = 5$ である。

x 座標の差は一方が 3、もう一方が -3 であるが、2 乗するとどちらも 9 になる。そのため、横方向への向きが反対でも、横方向の長さが同じであれば距離の計算には同じ値が現れる。