

第 156 講 確率変数の期待値

学習目標

有限個の値をとる確率変数について、それぞれの値に確率を掛けて合計することで期待値を求め、その意味を説明できるようになる。

期待値とは何か

確率変数では、試行の結果を数値で表す。例えば、さいころの目を X とすると、 X は $1, 2, 3, 4, 5, 6$ のいずれかの値をとる。

確率変数の値は、試行によって変わる場合がある。一方で、常に同じ値をとる確率変数もある。例えば、必ず 7 点になる得点を表す確率変数では、値は変化しない。

値が変わる場合でも変わらない場合でも、それぞれの値をとる確率を考えることで、確率変数全体の平均的な位置を考えることができる。この値が期待値である。

普通の平均では、すべての値を同じ重さで扱う。一方、期待値では、それぞれの値が現れる確率を重みとして考える。

つまり、期待値は「確率による重み付き平均」である。

例えば、ある確率変数 X が有限個の値 $x_1, x_2, \dots, x_n$ をとり、それぞれの確率が $p_1, p_2, \dots, p_n$ であるとする。

このとき、各値に確率を掛けて合計することで期待値を求める。

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

期待値は、確率変数がどのような値をどの程度の重みで持っているかを表す量である。

確率変数の期待値

確率変数 X が相異なる有限個の値 $x_1, x_2, \dots, x_n$ をとり、それぞれの値をとる確率を $p_1, p_2, \dots, p_n$ とする。

このとき、次の条件を満たす。

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

$$p_1, p_2, \dots, p_n \geq 0$$

期待値 $E(X)$ を次で定める。

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

公式の意味と条件

期待値の式は、各値の寄与を合計したものである。

値 x_i が現れる確率を p_i とすると、その値が期待値へ与える寄与は $x_i p_i$ で表される。

つまり、期待値はそれぞれの値の寄与を足し合わせたものである。

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

ここで、確率 p_i は重みとして働く。確率が大きい値は大きな重みを持ち、確率が小さい値は小さな重みを持つ。

本講では、確率変数が有限個の値をとる場合を扱う。値を $x_1, x_2, \dots, x_n$ 、それぞれの確率を

$p_1, p_2, \dots, p_n$ とすると、次の条件を満たす。

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

$$p_1, p_2, \dots, p_n \geq 0$$

等確率の場合は、期待値を値の単純平均として計算できる。

ただし、期待値と単純平均が一致するために等確率である必要はない。不等確率でも、偶然一致する場合がある。

例えば、値 $0, 1, 2$ をそれぞれ確率 $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ でとる場合、

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1$$

となる。

一方、値の単純平均は、

$$\frac{0 + 1 + 2}{3} = 1$$

であり、この場合は一致する。

したがって、等確率であることは期待値を単純平均で求められるための十分な条件であるが、一致するための必要条件ではない。

期待値でよくある誤解

期待値は、1 回の試行で実際に現れる値そのものを表すとは限らない。

例えば、さいころの期待値が 3.5 であっても、さいころに 3.5 という目があるわけではない。

一方で、期待値が実際にとる値と一致する場合もある。例えば、必ず 7 になる確率変数の期待値は 7 である。

また、期待値は最も出やすい値（最頻値）とは異なる概念である。期待値と最頻値は、数値が一致することもあれば異なることもある。

期待値は確率を重みとした平均であり、最頻値は最も大きな確率を持つ値である。

繰り返したときの期待値

期待値は、同じ確率分布に従う試行を独立に何度も繰り返したときの平均的な値を考える手掛かりになる。

ただし、有限回の試行で必ず期待値と同じ値になるわけではない。

例えば、さいころを数回振っただけでは、平均が必ず 3.5 になるとは限らない。試行回数を増やしたとき、長期的な平均が期待値に近づいていくという見方をする。

この講では、その考え方の証明や極限については扱わない。

例題 1

公平な 6 面さいころを 1 回投げ、出た目を確率変数 X とする。 X の期待値を求めよ。また、求めた期待値が実際のさいころの目として存在するか説明せよ。

例題 1 の解答・解説

さいころの各目が出る確率はすべて $\frac{1}{6}$ である。

値と確率を整理すると、次のようになる。

値	確率	値×確率
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$
4	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$

値	確率	値×確率
5	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
6	$\frac{1}{6}$	$\frac{6}{6}$

したがって、

$$\begin{aligned}
 E(X) &= 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} \\
 &= \frac{1+2+3+4+5+6}{6} \\
 &= \frac{21}{6} \\
 &= \frac{7}{2}
 \end{aligned}$$

よって、期待値は $E(X) = \frac{7}{2}$ である。

ただし、 $\frac{7}{2} = 3.5$ はさいころの目として存在しない。3.5 はこの確率分布から計算された重み付き平均の値であり、実際の 1 回の結果として必ず現れる値を表しているわけではない。

例題 2

ある架空の得点分布について、得点を確率変数 X とする。

得点	確率
0	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{3}{10}$
5	$\frac{1}{5}$

X の期待値を求めよ。

例題 2 の解答・解説

期待値は、各得点にその確率を掛けて合計する。

値・確率・値×確率を整理すると、次のようになる。

得点	確率	得点×確率
0	$\frac{1}{2}$	$0 \times \frac{1}{2} = 0$
2	$\frac{3}{10}$	$2 \times \frac{3}{10} = \frac{6}{10}$
5	$\frac{1}{5}$	$5 \times \frac{1}{5} = 1$

したがって、

$$\begin{aligned}
 E(X) &= 0 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{10} + 5 \times \frac{1}{5} \\
 &= 0 + \frac{6}{10} + 1 \\
 &= \frac{6}{10} + \frac{10}{10} \\
 &= \frac{16}{10} \\
 &= \frac{8}{5}
 \end{aligned}$$

よって、期待値は $E(X) = \frac{8}{5}$ である。
 この値は平均的な得点を表すが、実際の得点として必ず現れるとは限らない。

例題 3

ある架空の得点分布について、得点を確率変数 X とする。

得点	確率
-2	$\frac{3}{4}$
6	$\frac{1}{4}$

X の期待値を求めよ。また、この期待値が実際の得点として出るか説明せよ。

例題 3 の解答・解説

負の値をとる場合でも、期待値の求め方は変わらない。
 値・確率・値×確率を整理すると、次のようになる。

得点	確率	得点×確率
-2	$\frac{3}{4}$	$-2 \times \frac{3}{4} = -\frac{3}{2}$
6	$\frac{1}{4}$	$6 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$

したがって、

$$\begin{aligned}
 E(X) &= -2 \times \frac{3}{4} + 6 \times \frac{1}{4} \\
 &= -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

よって、期待値は $E(X) = 0$ である。
 しかし、実際の得点で 0 点が出るわけではない。この分布では出る得点は -2 と 6 だけであり、期待値の 0 は確率を考慮した平均的な位置を表している。

演習問題

練習問題 1

公平な 4 面さいころがあり、出る目を確率変数 X とする。出る目は 1, 2, 3, 4 の 4 種類である。 X の期待値を求めよ。

練習問題 1 の解答・解説

4 面さいころは各目が同じ確率で出るため、期待値は値の普通の平均として求めることができる。値と確率を整理すると、

値	確率	値×確率
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{4}$

したがって、

$$\begin{aligned}
 E(X) &= 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} \\
 &= \frac{1+2+3+4}{4} \\
 &= \frac{10}{4} \\
 &= \frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

よって、期待値は $E(X) = \frac{5}{2}$ である。

等確率の場合は、期待値を値の単純平均として考えることができる。

練習問題 2

1 枚ずつカードを引く試行を考える。青カードと赤カードをそれぞれ 1 枚ずつ用意し、各カードが選ばれる確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ とする。1 回引くごとにカードを戻してよく混ぜ、2 回独立に引く。2 回の色の組合せによる得点は次の通りである。

- ・ 青、青の場合：得点 0
- ・ 青、赤または赤、青の場合：得点 4
- ・ 赤、赤の場合：得点 10

得点を確率変数 X とするとき、 $E(X)$ を求めよ。

練習問題 2 の解答・解説

1 回ごとに青と赤が同じ確率で出るため、2 回の結果は次の 4 通りである。

色の結果	得点	確率
青、青	0	$\frac{1}{4}$
青、赤	4	$\frac{1}{4}$

色の結果	得点	確率
赤、青	4	$\frac{1}{4}$
赤、赤	10	$\frac{1}{4}$

同じ得点になる場合をまとめると、

得点	確率	得点×確率
0	$\frac{1}{4}$	0
4	$\frac{1}{2}$	2
10	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{2}$

したがって、

$$\begin{aligned}
 E(X) &= 0 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{2} + 10 \times \frac{1}{4} \\
 &= 0 + 2 + \frac{5}{2} \\
 &= \frac{9}{2}
 \end{aligned}$$

よって、期待値は $E(X) = \frac{9}{2}$ である。

このように、複数の試行結果が同じ得点に対応する場合は、その結果をまとめて確率分布を作ることができる。

練習問題 3

ある試験では、得点が次の分布に従う。

得点	確率
-3	$\frac{1}{2}$
5	$\frac{1}{4}$
9	$\frac{1}{4}$

得点を確率変数 X とするとき、期待値を求めよ。

練習問題 3 の解答・解説

負の得点を含む場合でも、期待値は同じ方法で求める。

値と確率の積を計算する。

得点	確率	得点×確率
-3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
5	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$
9	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$

したがって、

$$\begin{aligned}
 E(X) &= -3 \times \frac{1}{2} + 5 \times \frac{1}{4} + 9 \times \frac{1}{4} \\
 &= -\frac{6}{4} + \frac{5}{4} + \frac{9}{4} \\
 &= \frac{8}{4} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

よって、期待値は $E(X) = 2$ である。

得点に負の値が含まれていても、確率を掛けた平均として計算することができる。

練習問題 4

ある確率変数 X の確率分布表が次のように与えられている。

値	確率
1	0.2
3	0.5
6	0.4

この表が確率分布として正しいか説明せよ。

練習問題 4 の解答・解説

確率分布では、すべての確率の合計が 1 でなければならない。

与えられた確率の合計は、 $0.2 + 0.5 + 0.4 = 1.1$ となる。

また、各確率は負ではないが、確率の合計が 1 になっていない。

したがって、この表は確率分布として正しくない。

確率分布を確認するときは、値と確率の対応だけでなく、確率の合計も確認する必要がある。

練習問題 5

確率変数 X は常に 7 になるものとする。

つまり、

値	確率
7	1

である。

$E(X)$ を求めよ。また、期待値がどのような値になるか説明せよ。

練習問題 5 の解答・解説

値 7 が必ず出るので、その確率は 1 である。

したがって、 $E(X) = 7 \times 1 = 7$

よって、期待値は 7 である。

この場合、確率変数の値が毎回一定なので、期待値もその一定値になる。

期待値は必ず複数の値の平均を取るものではなく、1 つの値だけをとる確率変数にも定義できる。

練習問題 6

あるゲームの得点分布が次のように与えられている。

得点	確率
2	$\frac{1}{2}$
5	$\frac{1}{3}$
8	$\frac{1}{6}$

このゲームについて、期待値と最も出やすい得点をそれぞれ求め、両者の違いを説明せよ。

練習問題 6 の解答・解説

まず期待値を求める。

得点	確率	得点×確率
2	$\frac{1}{2}$	1
5	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
8	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{3}$

したがって、

$$\begin{aligned}
 E(X) &= 2 \times \frac{1}{2} + 5 \times \frac{1}{3} + 8 \times \frac{1}{6} \\
 &= 1 + \frac{5}{3} + \frac{4}{3} \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

よって、期待値は 4 である。

一方、最も確率の大きい得点は 2 点である。

したがって、

- ・ 期待値：4
- ・ 最も出やすい得点：2 となる。

期待値は確率を考慮した平均であり、最も出る値を表すものではない。ただし、分布によっては期待値と最も出やすい値が一致する場合もある。

練習問題 7

確率変数 X は分布 A に従い、確率変数 Y は分布 B に従うものとする。

次の 2 つの確率変数について考える。

分布 A

値	確率
0	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{2}$

分布 B

値	確率
1	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{2}$

$E(X)$ と $E(Y)$ を求め、期待値が同じでも分布が異なる場合があることを説明せよ。

練習問題 7 の解答・解説

分布 A の期待値を求める。

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

分布 B の期待値を求める。

$$\begin{aligned} E(Y) &= 1 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

したがって、 $E(X) = E(Y) = 2$ である。

しかし、分布 A は 0 と 4 に分かれ、分布 B は 1 と 3 に分かれているため、出る値の種類は異なる。このように、期待値が同じでも確率分布そのものが同じとは限らない。

練習問題 8

公平な 6 面さいころ 2 個を独立に投げ、その出た目の合計を確率変数 X とする。
合計値ごとの確率は次の通りである。

得点	確率
2	$\frac{1}{36}$
3	$\frac{2}{36}$
4	$\frac{3}{36}$
5	$\frac{4}{36}$
6	$\frac{5}{36}$
7	$\frac{6}{36}$
8	$\frac{5}{36}$
9	$\frac{4}{36}$
10	$\frac{3}{36}$
11	$\frac{2}{36}$
12	$\frac{1}{36}$

X の期待値を求めよ。

練習問題 8 の解答・解説

分布は 7 を中心として対称になっている。

2 と 12、3 と 11、4 と 10、5 と 9、6 と 8 は、それぞれ同じ確率である。

例えば、2 と 12 の寄与は、

$$2 \times \frac{1}{36} + 12 \times \frac{1}{36} = 14 \times \frac{1}{36}$$

である。

同様に各組をまとめると、

$$\begin{aligned} E(X) &= (2 + 12) \times \frac{1}{36} + (3 + 11) \times \frac{2}{36} \\ &\quad + (4 + 10) \times \frac{3}{36} + (5 + 9) \times \frac{4}{36} \\ &\quad + (6 + 8) \times \frac{5}{36} + 7 \times \frac{6}{36} \\ &= 14 \times \frac{1}{36} + 14 \times \frac{2}{36} + 14 \times \frac{3}{36} \\ &\quad + 14 \times \frac{4}{36} + 14 \times \frac{5}{36} + 7 \times \frac{6}{36} \\ &= \frac{14(1 + 2 + 3 + 4 + 5) + 42}{36} \\ &= \frac{14 \times 15 + 42}{36} \\ &= \frac{252}{36} \\ &= 7 \end{aligned}$$

よって、期待値は $E(X) = 7$ である。

この分布では、2 個のさいころの順序付きの結果が複数あり、それらが同じ合計値に対応する。そのような結果をまとめることで、合計値の確率分布を作っている。