

第 31 講 グラフを式からかく

学習目標

- ・ 二次関数を平方完成し、 $y = a(x - p)^2 + q$ の形へ変形できる。
- ・ 平方完成した式から軸と頂点を読み取れる。
- ・ 軸・頂点と必要な点を使って、二次関数のグラフをかける。
- ・ かいたグラフと元の式が対応しているか、代入と対称性で確認できる。

グラフをかく前に「形が分かる式」へ直す

点を大量に計算する前に軸と頂点を決める

二次関数

$$y = x^2 - 4x + 3$$

のグラフをかくことを考えます。

x に多くの値を代入して点を並べる方法でもグラフはかけますが、それだけでは放物線を中心となる位置が見えにくくなります。

そこで、まず平方完成します。

$$y = (x - 2)^2 - 1$$

この形なら、軸は $x = 2$ 、頂点は $(2, -1)$ とすぐに分かります。

グラフをかくときは、平方完成して放物線の基準となる位置を先に決めるのが基本です。

二次関数のグラフをかく基本手順

1. 必要なら平方完成して $y = a(x - p)^2 + q$ の形にする。
2. 軸 $x = p$ を求める。
3. 頂点 (p, q) を求める。
4. 軸の左右で必要な点を求める。
5. 軸について対称になるように、点を滑らかな放物線で結ぶ。

軸と頂点を最初にかく

放物線の位置を決める 2 つの情報

$y = a(x - p)^2 + q$ のグラフでは、軸は $x = p$ 、頂点は (p, q) です。
たとえば、

$$y = (x - 2)^2 - 1$$

なら、軸は $x = 2$ 、頂点は $(2, -1)$ です。

グラフをかくときは、まず頂点を座標平面に取り、軸 $x = 2$ を意識します。

この 2 つが決まると、放物線をどこに配置すればよいかが大きく絞られます。

かっこの中の符号をそのまま読まない

$y = (x + 3)^2 + 1$ なら、 $x + 3 = 0$ となるのは $x = -3$ です。

したがって、軸は $x = -3$ 、頂点は $(-3, 1)$ です。

グラフをかく前に軸を取り違えると、その後の点がすべてずれてしまいます。

頂点以外の点を求める

軸の片側だけ計算すれば反対側も分かる

$y = (x - 2)^2 - 1$ で、軸は $x = 2$ です。

$x = 1$ を代入すると $y = 0$ なので、点 $(1, 0)$ を通ります。

軸 $x = 2$ について左右対称なので、 $x = 3$ のときも $y = 0$ です。したがって、点 $(3, 0)$ も通ります。

同じように、 $x = 0$ のとき $y = 3$ なら、軸から同じ距離にある $x = 4$ でも $y = 3$ です。

軸の片側で点を求めたら、**対称性を利用して反対側の点を取ると計算を減らせます。**

点の選び方

頂点だけでは放物線の広がり方を十分に表せません。

そこで、頂点に加えて、軸から 1 や 2 だけ離れた位置の点を求めます。

軸から左右に同じ距離の点では、 y の値が等しくなります。

実際にグラフをかく

$y = x^2 - 4x + 3$ のグラフ

平方完成すると、

$$y = (x - 2)^2 - 1$$

です。

したがって、軸は $x = 2$ 、頂点は $(2, -1)$ です。

また、 $x = 1, 3$ のとき $y = 0$ 、 $x = 0, 4$ のとき $y = 3$ です。

これらの点を取り、軸 $x = 2$ について左右対称になるように滑らかに結びます。

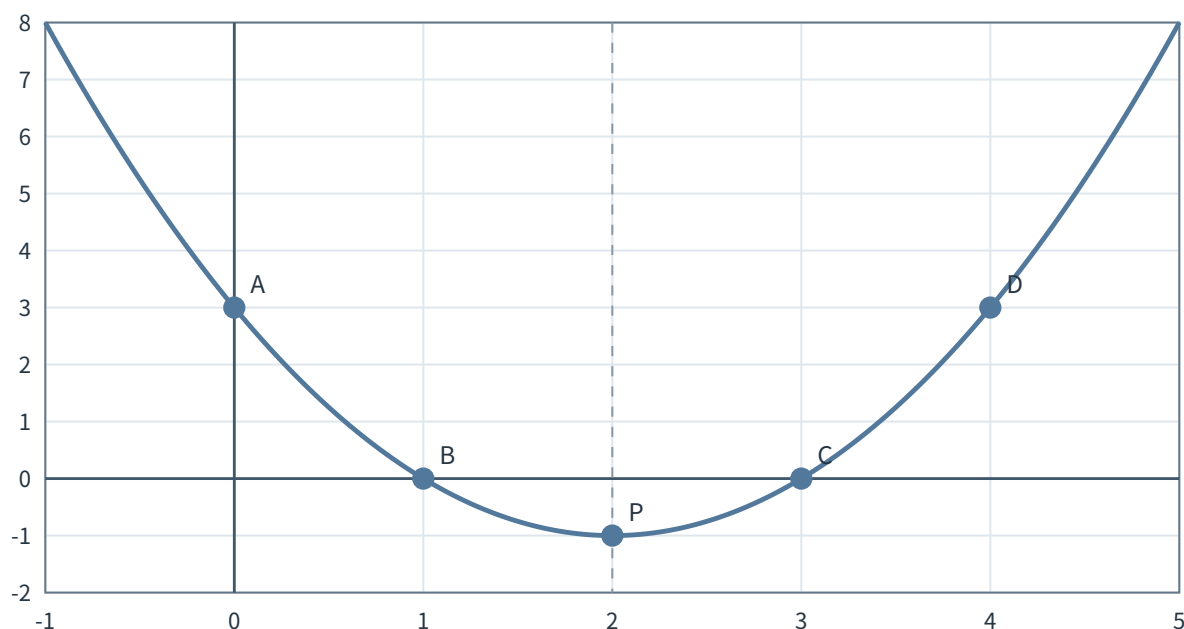


図 1 $y = x^2 - 4x + 3$ のグラフ

点を折れ線で結ばない

二次関数のグラフは、点と点を直線で結んだ折れ線ではありません。
求めた点を通り、軸について対称になる滑らかな放物線としてかきます。

a の符号と広がり方も確認する**平方完成した後も係数 a を見る**

たとえば、

$$y = -2(x + 1)^2 + 4$$

では、軸は $x = -1$ 、頂点は $(-1, 4)$ です。

さらに $a = -2 < 0$ なので、グラフは下に開きます。

また、 $|a| = 2$ なので、 $y = -x^2$ より細い形になります。

軸と頂点だけでなく、 a の符号と大きさから放物線の向きと広がり方も確認すると、グラフ全体を正しくかけます。

グラフをかく直前の確認

$y = a(x - p)^2 + q$ を見たら、

- ・ 軸は $x = p$
- ・ 頂点は (p, q)
- ・ $a > 0$ なら上に開く
- ・ $a < 0$ なら下に開く
- ・ $|a|$ が大きいほど細い

と確認してから点を取ります。

一般の式からグラフをかく**平方完成はグラフを読むための準備**

二次関数

$$y = 2x^2 + 4x - 6$$

を考えます。

平方完成すると、

$$y = 2(x + 1)^2 - 8$$

です。

したがって、軸は $x = -1$ 、頂点は $(-1, -8)$ です。

$x = 0$ のとき $y = -6$ なので、軸について対称な $x = -2$ のときも $y = -6$ です。

このように、平方完成 → 軸・頂点 → 必要な点 → 対称性の順に進めると、一般の二次関数でもグラフを整理してかけます。

この講では最大・最小を判断しない

グラフをかくと、放物線の高低も見えるようになります。

ただし、この講の中心は式から正しいグラフをかくことです。最大・最小の判断は次講で扱います。

例題

例題 1

二次関数

$$y = x^2 - 6x + 5$$

について、軸、頂点を求め、グラフをかくために $x = 2, 4$ のときの y の値を求めなさい。

例題 1 の解答・解説

平方完成すると、

$$y = (x - 3)^2 - 4$$

です。

したがって、軸は $x = 3$ 、頂点は $(3, -4)$ です。

$x = 2$ のとき $y = -3$ です。

$x = 4$ のときも $y = -3$ です。

2 点 $(2, -3)$ 、 $(4, -3)$ は軸 $x = 3$ について対称です。この点と頂点を使って、上に開く放物線をかきます。

例題 2

二次関数

$$y = -x^2 - 4x$$

について、軸と頂点を求め、グラフをかくために $x = -3, -1$ のときの y の値を求めなさい。

例題 2 の解答・解説

平方完成すると、

$$y = -(x + 2)^2 + 4$$

です。

したがって、軸は $x = -2$ 、頂点は $(-2, 4)$ です。

$x = -3$ のとき $y = 3$ です。

$x = -1$ のときも $y = 3$ です。

$a = -1 < 0$ なので、これらの点を通る下向きの放物線をかきます。

例題 3

二次関数

$$y = 2x^2 - 8x + 6$$

のグラフをかくために、次の問いに答えなさい。

- (1) 平方完成しなさい。
- (2) 軸と頂点を求めなさい。
- (3) 軸から左右に 1 離れた 2 点の座標を求めなさい。

例題 3 の解答・解説

(1) 平方完成すると、

$$y = 2(x - 2)^2 - 2$$

です。

(2) 軸は $x = 2$ 、頂点は $(2, -2)$ です。

(3) 軸から左右に 1 離れた x は 1, 3 です。

どちらも $y = 0$ なので、2 点は $(1, 0)$ 、 $(3, 0)$ です。

$a = 2 > 0$ なので、これらの点を通る上向きの放物線をかきます。

演習問題**練習問題 1**

二次関数

$$y = x^2 - 4x$$

について、次の問いに答えなさい。

- (1) 平方完成しなさい。
- (2) 軸と頂点を求めなさい。
- (3) $x = 1, 3$ のときの y の値を求めなさい。

練習問題 2

二次関数

$$y = x^2 + 2x - 3$$

について、次の問いに答えなさい。

- (1) 軸と頂点を求めなさい。
- (2) 軸から左右に 1 離れた 2 点の座標を求めなさい。

練習問題 3

二次関数

$$y = -x^2 + 6x - 5$$

について、軸、頂点、グラフが開く向きを求めなさい。

練習問題 4

二次関数

$$y = 2x^2 + 4x$$

について、次の問いに答えなさい。

- (1) 平方完成しなさい。
- (2) 軸と頂点を求めなさい。
- (3) $x = 0, -2$ のときの y の値を求めなさい。

練習問題 5

二次関数

$$y = -2x^2 - 8x - 6$$

のグラフをかくために、軸、頂点、軸から左右に 1 離れた 2 点の座標を求めなさい。

練習問題 6

二次関数

$$y = x^2 + 4x + 1$$

について、次の問いに答えなさい。

- (1) 平方完成しなさい。
- (2) 軸と頂点を求めなさい。
- (3) $x = -1, -3$ のときの y の値を求め、対称性を確かめなさい。

練習問題 7

ある二次関数は、

$$y = 3(x - 1)^2 - 2$$

で表される。

グラフをかくために、軸、頂点、 $x = 0, 2$ のときの y の値を求めなさい。また、グラフが上と下のどちらに開くか答えなさい。

練習問題 8

ある生徒は、

$$y = x^2 - 6x + 8$$

のグラフをかくとき、平方完成して $y = (x - 3)^2 - 1$ とした後、頂点 $(3, -1)$ だけを取り、そこから左右へ直線を引きました。

このかき方の問題点を 2 つ説明し、グラフをかくために追加で求めるとよい点を 2 つ示しなさい。

演習問題の解答・解説

練習問題 1 の解答・解説

- (1) 平方完成すると $y = (x - 2)^2 - 4$ です。
- (2) 軸は $x = 2$ 、頂点は $(2, -4)$ です。
- (3) $x = 1$ のとき $y = -3$ 、 $x = 3$ のときも $y = -3$ です。
2 点は軸 $x = 2$ について対称です。

練習問題 2 の解答・解説

平方完成すると $y = (x + 1)^2 - 4$ です。

(1) 軸は $x = -1$ 、頂点は $(-1, -4)$ です。

(2) 軸から左右に 1 離れた x は $-2, 0$ です。

どちらも $y = -3$ なので、2 点は $(-2, -3)$ 、 $(0, -3)$ です。

練習問題 3 の解答・解説

平方完成すると $y = -(x - 3)^2 + 4$ です。

したがって、軸は $x = 3$ 、頂点は $(3, 4)$ です。

$a = -1 < 0$ なので、グラフは下に開きます。

練習問題 4 の解答・解説

(1) 平方完成すると $y = 2(x + 1)^2 - 2$ です。

(2) 軸は $x = -1$ 、頂点は $(-1, -2)$ です。

(3) $x = 0$ のとき $y = 0$ 、 $x = -2$ のときも $y = 0$ です。

この 2 点は軸 $x = -1$ について対称です。

練習問題 5 の解答・解説

平方完成すると $y = -2(x + 2)^2 + 2$ です。

したがって、軸は $x = -2$ 、頂点は $(-2, 2)$ です。

軸から左右に 1 離れた $x = -3, -1$ では、どちらも $y = 0$ です。

したがって、必要な 2 点は $(-3, 0)$ 、 $(-1, 0)$ です。

練習問題 6 の解答・解説

(1) 平方完成すると $y = (x + 2)^2 - 3$ です。

(2) 軸は $x = -2$ 、頂点は $(-2, -3)$ です。

(3) $x = -1$ のとき $y = -2$ です。

$x = -3$ のときも $y = -2$ です。

-1 と -3 は軸 $x = -2$ から同じ距離にあり、関数の値も等しくなっています。

練習問題 7 の解答・解説

軸は $x = 1$ 、頂点は $(1, -2)$ です。

$x = 0$ のとき $y = 1$ です。

$x = 2$ のときも $y = 1$ です。

$a = 3 > 0$ なので、グラフは上に開きます。

したがって、頂点 $(1, -2)$ と対称な 2 点 $(0, 1)$ 、 $(2, 1)$ を使って放物線をかけます。

練習問題 8 の解答・解説

1 つ目の問題点は、頂点だけでは放物線の広がり方を十分に決められないことです。

2 つ目は、二次関数のグラフを直線で結んではいけないことです。グラフは滑らかな放物線になります。

たとえば $x = 2$ のとき $y = 0$ なので、点 $(2, 0)$ を通ります。

軸 $x = 3$ について対称なので、点 $(4, 0)$ も通ります。

したがって、頂点 $(3, -1)$ と点 $(2, 0)$ 、 $(4, 0)$ などを取り、左右対称な滑らかな放物線をかきます。