

第 94 講 円の方程式

学習目標

- ・ 円の方程式 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ と、中心 (a, b) 、半径 r の対応を説明できる。
- ・ 中心と半径から円の方程式を作ることができる。
- ・ 展開された式を平方完成し、円の中心と半径を求めることができる。
- ・ 平方完成後の右辺から、円を表すかどうかを判断できる。
- ・ 点の座標を円の方程式へ代入し、その点が円周上にあるかを判断できる。

1. 円の方程式は「中心からの距離が一定」を表す

円を座標で表す考え方

円の方程式は、形だけを覚える公式ではない。

円とは、ある 1 点からの距離が一定である点の集まりである。この「ある 1 点」が中心であり、一定の距離が半径である。

中心を $C(a, b)$ 、円周上の点を $P(x, y)$ 、半径を r とする。点 P が円周上にあるならば、中心 C から点 P までの距離は r である。

右上にある点を例に、 $x > a$ 、 $y > b$ として $H(x, b)$ をとる。図の直角三角形で、横の辺 CH は $x - a$ 、縦の辺 HP は $y - b$ 、斜辺 CP は半径 r である。

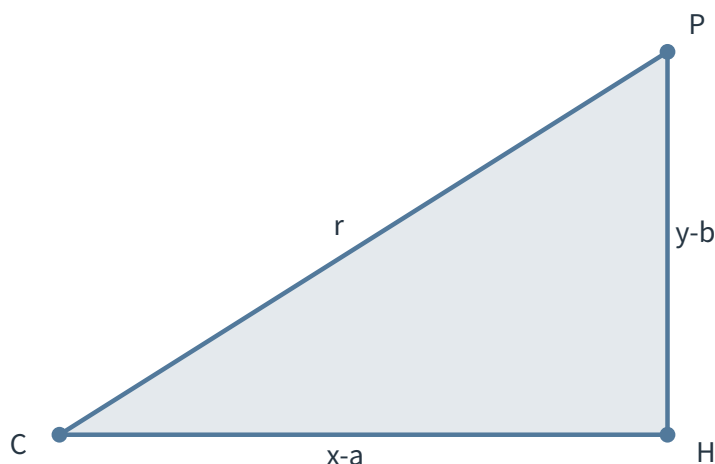


図 1 中心 $C(a, b)$ から円周点 $P(x, y)$ への横・縦の差を直角三角形で表す。図は $x > a$ 、 $y > b$ の場合

点 P が左側または下側にある場合、横・縦の長さはそれぞれ $|x - a|$ 、 $|y - b|$ となる。2 乗すれば符号の違いは消えるので、どの位置の点にも同じ式を使える。

2 点間の距離の公式から、

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

となる。両辺を 2 乗すると、

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

を得る。

したがって、円の方程式は「中心からの距離が r である」という条件を座標の式へ変えたものなのである。

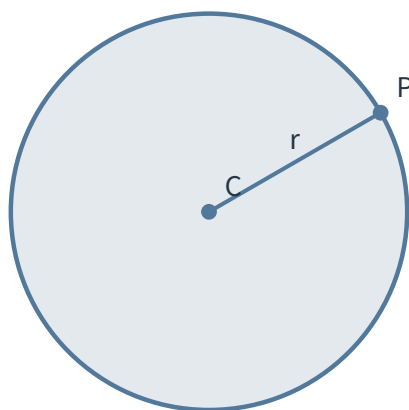


図2 中心 C から円周上の点 P までの距離が半径 r である円

円の方程式

中心が (a, b) 、半径が r の円の方程式は、 $r > 0$ のとき

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

である。

式を見るとき判断軸

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ では、次の対応を見る。

- 中心の x 座標は a
- 中心の y 座標は b
- 半径は r
- 右辺は半径ではなく、半径の2乗 r^2

特に、かっこの中の符号をそのまま中心の座標にしないことが重要である。

2. 式から中心と半径を読む

たとえば、 $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$ を

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

と比べる。

$(x - 3)^2$ から $a = 3$ 、 $(y + 2)^2 = (y - (-2))^2$ から $b = -2$ である。また、 $r^2 = 25$ だから $r = 5$ である。

符号と半径の読み違いに注意

$(x + 2)^2$ は $(x - (-2))^2$ と考えるため、中心の x 座標は -2 である。

また、右辺が 49 ならば半径は 49 ではなく $\sqrt{49} = 7$ である。

例題 1：式から中心と半径を求める

円

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

の中心と半径を求めよ。

例題 1 の解答・解説

円の方程式の基本形

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

と比較する。

x については $(x - 2)^2$ であるから、中心の x 座標は 2 である。

y については

$$(y + 3)^2 = (y - (-3))^2$$

であるから、中心の y 座標は -3 である。

また、

$$r^2 = 16$$

より、半径は正の数なので $r = 4$ である。

したがって、中心は $(2, -3)$ 、半径は 4 である。

検算すると、中心 $(2, -3)$ を基準にした式は $(x - 2)^2 + (y + 3)^2$ となり、半径の 2 乗は $4^2 = 16$ であるため、もとの式と一致する。

3. 中心と半径から方程式を作る

中心と半径が分かっている場合は、

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

へそのまま代入すればよい。

ただし、負の座標を代入すると符号が変わる点に注意する必要がある。

例題 2：中心と半径から円の方程式を作る

中心が $(-1, 2)$ 、半径が 3 である円の方程式を求めよ。

例題 2 の解答・解説

中心は $(-1, 2)$ なので、 $a = -1$ 、 $b = 2$ である。また、半径は $r = 3$ である。
基本形へ代入すると、

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$(x - (-1))^2 + (y - 2)^2 = 3^2$$

となる。

$x - (-1) = x + 1$ 、 $3^2 = 9$ であるから、円の方程式は

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

である。

検算すると、 $(x + 1)^2 = (x - (-1))^2$ なので中心の x 座標は -1 、 $(y - 2)^2$ なので中心の y 座標は 2 、
右辺 9 から半径は 3 となる。すべて問題の条件と一致する。

4. 展開された式は平方完成して読む

なぜ平方完成するのか

円の方程式が最初から $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ の形になっているとは限らない。
たとえば、

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$$

のように展開された形で与えられることがある。このままでは中心と半径を直接読み取れない。
そこで、 x を含む部分と y を含む部分をそれぞれ平方完成し、

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

の形へ戻すのである。

平方完成は単なる式変形ではなく、隠れている中心と半径が見える形に戻す操作である。

例題 3：平方完成して中心と半径を求める

円

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$$

の中心と半径を求めよ。

例題 3 の解答・解説

x を含む項と y を含む項をまとめる。

$$x^2 - 6x + y^2 + 4y = 3$$

$x^2 - 6x$ を平方完成すると、

$$x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 9$$

である。

同様に、

$$y^2 + 4y = (y + 2)^2 - 4$$

である。

これらを代入すると、

$$(x-3)^2 - 9 + (y+2)^2 - 4 = 3$$

となる。定数を右辺へ移すと、

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$$

である。

したがって、中心は $(3, -2)$ 、半径は 4 である。

次の座標図でも、平方完成後の式 $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$ が中心 $(3, -2)$ 、半径 4 の円を表すことを確かめられる。中心の y 座標が -2 である点に注目する。

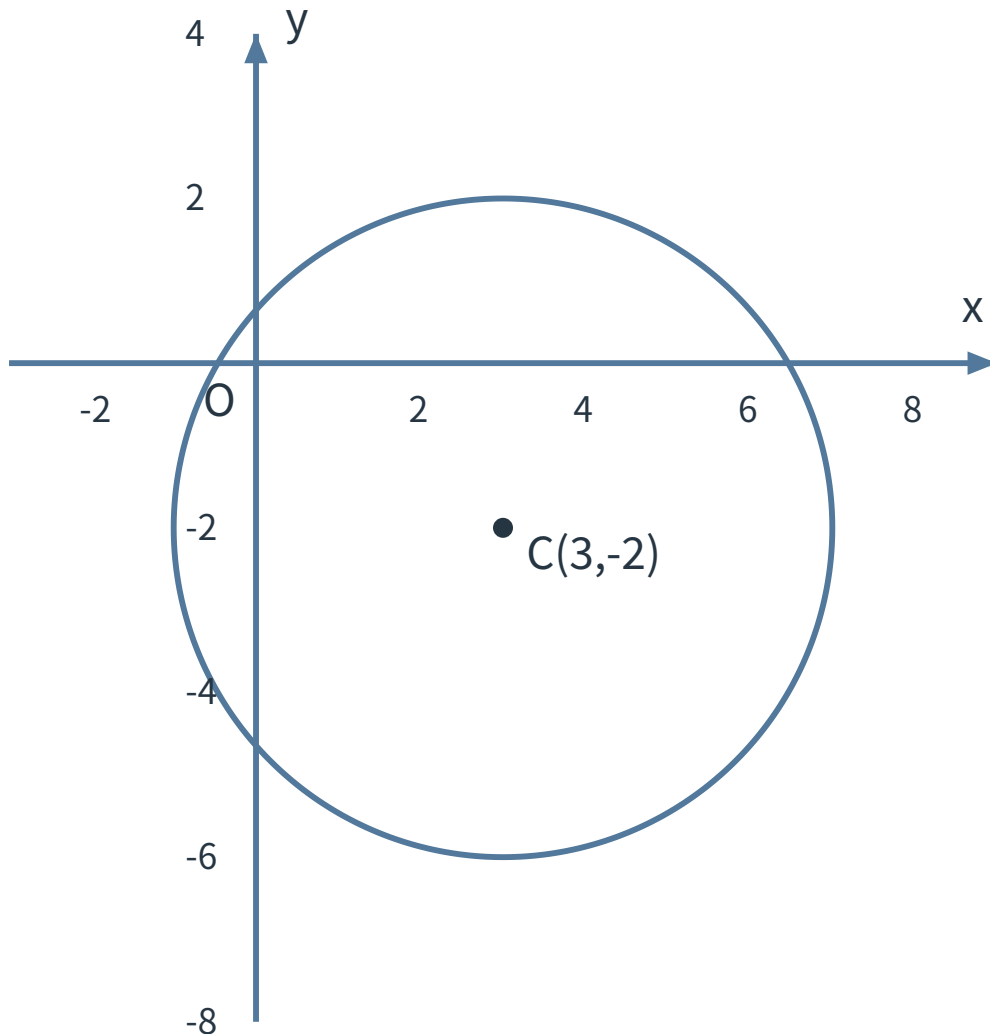


図 3 中心 $C(3, -2)$ 、半径 4 の円

式変形を独立に検算する。

x の部分は

$$(x-3)^2 - 9 = x^2 - 6x$$

であり、 y の部分は

$$(y+2)^2 - 4 = y^2 + 4y$$

である。また、半径は $\sqrt{16} = 4$ である。したがって、平方完成と半径の読み取りはいずれも正しい。

平方完成の手順

展開された円の式では、次の順序で処理するとよい。

1. x を含む項と y を含む項をそれぞれまとめる。
2. 定数項を右辺へ移す。
3. x の部分を平方完成する。
4. y の部分を平方完成する。
5. $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R$ の形に整理する。
6. $R > 0$ ならば、中心は (a, b) 、半径は $\sqrt{R}$ である。

5. 右辺が正であることを確認する

平方完成して

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R$$

となったとする。

左辺は 2 つの 2 乗の和なので、必ず 0 以上である。そのため、右辺 R の符号によって意味が変わる。

- $R > 0$ のとき、半径 $\sqrt{R}$ の円を表す。
- $R = 0$ のとき、条件を満たすのは中心 (a, b) の 1 点だけであり、正の半径をもつ円ではない。
- $R < 0$ のとき、左辺が負になることはないため、条件を満たす実数の点は存在しない。

この確認を行えば、平方完成できたというだけで誤って「円である」と判断することを防げる。たとえば、

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 8 = 0$$

を平方完成する。

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y = -8$$

$$(x - 1)^2 - 1 + (y + 2)^2 - 4 = -8$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = -3$$

右辺が負であるため、この方程式を満たす実数の点は存在せず、円を表さない。

6. 点が円周上にあるかは代入して確かめる

座標を方程式へ代入する

円の方程式は、円周上にある点の座標が満たす条件である。

したがって、点 (p, q) が円周上にあるかを調べるには、 $x = p$ 、 $y = q$ を円の方程式へ代入すればよい。

代入した結果、左辺と右辺が等しければその点は円周上にあり、等しくなければ円周上にはない。これは「図を見て判断する」のではなく、中心からの距離が半径と等しいことを式で確認しているのである。

例題 4：点が円周上にあるかを調べる

円

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$$

について、点 $A(4, 2)$ と点 $B(5, 0)$ がそれぞれ円周上にあるかを調べよ。

例題 4 の解答・解説

点 $A(4, 2)$ について、 $x = 4$ 、 $y = 2$ を左辺へ代入する。

$$\begin{aligned}(4-1)^2 + (2+2)^2 &= 3^2 + 4^2 \\ &= 9 + 16 \\ &= 25\end{aligned}$$

右辺の 25 と等しいので、点 A は円周上にある。

次に、点 $B(5, 0)$ について、 $x = 5$ 、 $y = 0$ を代入する。

$$\begin{aligned}(5-1)^2 + (0+2)^2 &= 4^2 + 2^2 \\ &= 16 + 4 \\ &= 20\end{aligned}$$

20 は右辺の 25 と等しくないので、点 B は円周上にない。

したがって、点 A は円周上にあり、点 B は円周上にない。

この計算は距離の 2 乗を比較している。点 A では中心 $(1, -2)$ からの距離の 2 乗が 25 となり、半径 5 の 2 乗と一致している。

7. 演習問題**演習問題 1**

円

$$(x+4)^2 + (y-1)^2 = 36$$

の中心と半径を求めよ。

演習問題 2

中心が $(3, -2)$ 、半径が 4 である円の方程式を求めよ。

演習問題 3

中心が $(-2, 1)$ で、点 $P(1, 5)$ を通る円の方程式を求めよ。

演習問題 4

方程式

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$$

が表す円の中心と半径を求めよ。

演習問題 5

次の各方程式について、正の半径をもつ円を表すかを判断せよ。円を表す場合は中心と半径も求めよ。

(1)

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$$

(2)

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$$

(3)

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 6 = 0$$

演習問題 6

円

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 13$$

について、点 $A(1, 3)$ と点 $B(1, 2)$ がそれぞれ円周上にあるかを調べよ。

8. 演習問題の解答・解説**演習問題 1 の解答・解説**

基本形

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

と比較する。

$(x + 4)^2 = (x - (-4))^2$ なので、中心の x 座標は -4 である。

$(y - 1)^2$ なので、中心の y 座標は 1 である。

また、

$$r^2 = 36$$

より、 $r = 6$ である。

したがって、中心は $(-4, 1)$ 、半径は 6 である。

検算すると、中心 $(-4, 1)$ を基本形へ入れれば $(x + 4)^2 + (y - 1)^2$ となり、 $6^2 = 36$ であるため、もとの式と一致する。

演習問題 2 の解答・解説

中心が $(3, -2)$ なので、 $a = 3$ 、 $b = -2$ である。半径は $r = 4$ である。
基本形へ代入すると、

$$\begin{aligned}(x - a)^2 + (y - b)^2 &= r^2 \\ (x - 3)^2 + (y - (-2))^2 &= 4^2\end{aligned}$$

となる。

したがって、求める円の方程式は

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$$

である。

検算すると、中心は $(3, -2)$ 、右辺から半径は $\sqrt{16} = 4$ となり、問題の条件と一致する。

演習問題 3 の解答・解説

中心 $(-2, 1)$ から点 $P(1, 5)$ までの距離が半径である。
半径の 2 乗を求めると、

$$\begin{aligned}r^2 &= (1 - (-2))^2 + (5 - 1)^2 \\ &= 3^2 + 4^2 \\ &= 9 + 16 \\ &= 25\end{aligned}$$

である。

中心が $(-2, 1)$ なので、円の方程式は

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$$

である。

検算として点 $P(1, 5)$ を代入すると、

$$\begin{aligned}(1 + 2)^2 + (5 - 1)^2 &= 3^2 + 4^2 \\ &= 25\end{aligned}$$

となり、右辺と一致する。したがって、点 P は確かにこの円周上にある。

演習問題 4 の解答・解説

定数項を右辺へ移し、 x と y の部分をそれぞれ平方完成する。

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y = 12$$

x の部分は

$$x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$$

であり、 y の部分は

$$y^2 - 6y = (y - 3)^2 - 9$$

である。

したがって、

$$(x + 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 = 12$$

となる。

定数を右辺へ移すと、

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$$

である。

したがって、中心は $(-2, 3)$ 、半径は 5 である。

平方完成を検算すると、

$$(x+2)^2 - 4 = x^2 + 4x$$

かつ

$$(y-3)^2 - 9 = y^2 - 6y$$

である。また、半径の 2 乗は 25 なので半径は 5 である。

演習問題 5 の解答・解説

3 つの方程式は、平方完成した後の右辺だけが異なる。右辺が正、0、負のどれになるかに注目する。

(1)

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$$

より、

$$x^2 - 4x + y^2 + 2y = -1$$

である。

平方完成すると、

$$(x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 = -1$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$$

となる。

右辺が正なので、正の半径をもつ円である。中心は $(2, -1)$ 、半径は 2 である。

(2)

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$$

より、

$$x^2 - 4x + y^2 + 2y = -5$$

である。

平方完成すると、

$$(x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 = -5$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 0$$

となる。

2 乗の和が 0 になるのは、両方が 0 のときだけである。したがって、条件を満たすのは点 $(2, -1)$ だけであり、正の半径をもつ円ではない。

(3)

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 6 = 0$$

より、

$$x^2 - 4x + y^2 + 2y = -6$$

である。

平方完成すると、

$$(x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 = -6$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = -1$$

となる。

左辺は 2 乗の和なので 0 以上であり、 -1 になることはない。したがって、この方程式を満たす実数の点は存在せず、円を表さない。

以上より、(1)だけが正の半径をもつ円であり、その中心は $(2, -1)$ 、半径は 2 である。

演習問題 6 の解答・解説

点 $A(1, 3)$ を円の方程式へ代入する。

$$(1+2)^2 + (3-1)^2 = 3^2 + 2^2$$

$$= 9 + 4$$

$$= 13$$

右辺の 13 と一致するため、点 A は円周上にある。

次に、点 $B(1, 2)$ を代入する。

$$(1+2)^2 + (2-1)^2 = 3^2 + 1^2$$

$$= 9 + 1$$

$$= 10$$

10 は右辺の 13 と一致しないため、点 B は円周上にない。

したがって、点 A は円周上にあり、点 B は円周上にない。

代入では左辺だけを計算して終わらず、必ず右辺と等しいかまで確認することが必要である。