

第 178 講 合成関数

学習目標

- 合成関数の意味を理解し、 $f(g(x))$ では内側の関数を先に計算する流れを説明できる。
- 合成関数の式と定義域を求め、関数の順序による違いを判断できる。

合成関数の考え方

関数とは、定義域の各入力に出力をただ 1 つ対応させる仕組みである。1 つの関数の出力を、さらに別の関数の入力として使うことを考える。例えば、ある数を関数 g に入れて結果を出し、その結果を関数 f に入れる流れを考える。このとき、入力から結果までの流れは

$$x \rightarrow g(x) \rightarrow f(g(x))$$

となる。この 2 段階の変化を 1 つの関数として表したものが合成関数である。合成関数で最も重要なのは、式の見ただけではなく「入力がどの順番で変化するか」を見ることである。 $f(g(x))$ は、右側の g を先に計算し、その結果を f に入れる。したがって、左から順に計算するのではない。また、 $f(g(x))$ と $g(f(x))$ は一般には異なる関数である。関数の順番を変えると、途中の入力が変わるため、式だけでなく定義域も変化する場合がある。一方で、特別な場合には一致することもあるため、「必ず異なる」と決めつけてはいけない。

合成関数の定義

定義域の追加指定がなければ、それぞれの式が実数として意味をもつ最大の範囲を定義域とする。 x を実数、 f, g を実数値関数とする。 g の出力を f の入力として使う関数を、 f と g の合成関数といい、 $f(g(x))$ と表す。 $f(g(x))$ では、まず $g(x)$ を求め、その値を f の式へ代入する。定義域は、次の 2 つの条件を同時に満たす x 全体である。

- x が g の定義域に含まれる。
- $g(x)$ が f の定義域に含まれる。

つまり、内側の関数が定義され、その出力が外側の関数の定義域に属する必要がある。式を変形して約分した結果、見かけ上簡単になった場合でも、もとの 2 条件による制限は残る。

合成関数を見るポイント

$f(g(x))$ を考えるときは、次の順序で確認する。

1. まず x が g の定義域に含まれるか確認する。
2. 次に $g(x)$ を求める。
3. 求めた $g(x)$ が f の定義域に含まれるか確認する。
4. 条件を満たす場合に、その値を f へ入れる。

$f(g(x))$ と $g(f(x))$ は順序が異なるため、別々に考える必要がある。一般式を変形するときも、もとの 2 つの入力条件は保持する。

注意

合成関数では、計算後の式だけを見て判断してはいけない。例えば、計算途中で分母が約分できても、もともと分母が 0 になる値は関数として許されない場合がある。また、 $f(g(x))$ は内側の関数の出力を外側の関数へ入力する合成である。一方、 $f(x)g(x)$ は同じ x に対する 2 つの関数値を掛ける積であり、意味が異なる。元の関数の定義域を確認してから、合成後の式を扱うことが大切である。

例題 1

$f(x) = x^2$ 、 $g(x) = x + 1$ とする。 $f(g(x))$ と $g(f(x))$ をそれぞれ求め、定義域を比較しなさい。また、 $x = 2$ のときの $f(g(x))$ と $g(f(x))$ の値を求めなさい。

例題 1 の解答・解説

$f(g(x))$ は、まず $g(x)$ を求め、その結果を f に入れる。 $g(x) = x + 1$ なので、

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(x + 1) \\ &= (x + 1)^2 \end{aligned}$$

である。全ての实数 x で $g(x)$ が定義され、その出力は実数である。また、 $f(x) = x^2$ はすべての実数を入力できるため、 $g(x)$ の値を f へ代入できる。したがって、 $f(g(x))$ の定義域はすべての実数である。次に、 $g(f(x))$ を求める。

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(x^2) \\ &= x^2 + 1 \end{aligned}$$

こちらも定義域はすべての実数である。式を比較すると、

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= (x + 1)^2 \\ g(f(x)) &= x^2 + 1 \end{aligned}$$

となり、一般には異なる。 $x = 2$ のとき、

$$f(g(2)) = (2 + 1)^2 = 9$$

である。一方、

$$g(f(2)) = 2^2 + 1 = 5$$

である。合成する順番を変えると、同じ入力でも結果が変わることが分かる。

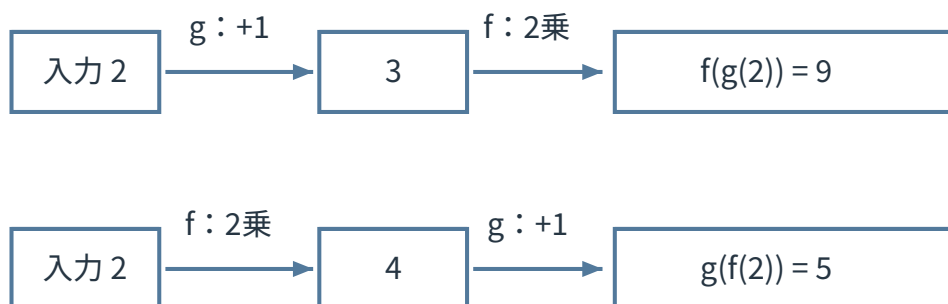


図1 $f(x)=x^2$ 、 $g(x)=x+1$ に同じ入力 2 を与えた対応図である。上段は内側の g を先に、次に外側の f を使い、 $2 \rightarrow 3 \rightarrow 9$ と計算する。下段は内側の f を先に、次に外側の g を使い、 $2 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ と計算する。矢印は計算の順を表し、枠の位置や大きさは座標・面積・値の大きさを表さない。

例題 2

$f(x) = \sqrt{x}$ 、 $g(x) = 3 - x$ とする。 $f(g(x))$ と $g(f(x))$ の式および定義域をそれぞれ求めなさい。

例題 2 の解答・解説

まず、 $f(x) = \sqrt{x}$ の定義域は $x \geq 0$ である。一方、 $g(x) = 3 - x$ はすべての実数で定義される。 $f(g(x))$ では、内側の g の入力条件はすべての実数で満たされる。外側の f へ入れる値について、 $3 - x \geq 0$ が必要である。したがって、 $x \leq 3$ であり、

$$f(g(x)) = \sqrt{3 - x}$$

の定義域は $x \leq 3$ である。次に、 $g(f(x))$ を考える。内側の f が定義される条件は、 $x \geq 0$

である。 $f(x) = \sqrt{x}$ の出力は実数であり、外側の $g(x) = 3 - x$ はすべての実数を入力できるため、追加条件はない。よって、

$$g(f(x)) = 3 - \sqrt{x}$$

の定義域は $x \geq 0$ である。同じ 2 つの関数を使っているが、合成の順序によって式と定義域の両方が変化する。

例題 3

$f(x) = \frac{1}{x-1}$ 、 $g(x) = \frac{1}{x}$ とする。 $f(g(x))$ の式と定義域を求めなさい。また、 $x = 2$ のときの値を求めなさい。

例題 3 の解答・解説

$f(g(x))$ を考える前に、2つの入力条件を確認する。まず、 $g(x) = \frac{1}{x}$ が定義されるため、 $x \neq 0$

である。さらに、外側の $f(x) = \frac{1}{x-1}$ へ入れる値が 1 になってはいけないため、

$$\frac{1}{x} \neq 1$$

である。ただし、これは $x \neq 0$ の範囲で考える条件なので、

$x \neq 1$

となる。したがって、合成関数の定義域は $x \neq 0$ かつ $x \neq 1$ である。この範囲で式を変形すると、

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= \frac{1}{\frac{1}{x} - 1} \\ &= \frac{1}{\frac{1-x}{x}} \\ &= \frac{x}{1-x} \end{aligned}$$

となる。簡約後の式 $\frac{x}{1-x}$ だけを見ると $x=0$ でも値を定められるように見える。しかし、もとの合成では $g(0)$ が存在しないため、 $x=0$ は許されない。 $x=2$ のとき、

$$g(2) = \frac{1}{2}$$

であり、

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{2} - 1} = -2$$

となる。定義域が異なる場合、同じ式に変形できても同じ関数として扱うことはできない。

演習問題

練習問題 1

$f(x) = 2x - 1$ 、 $g(x) = x^2$ とする。 $f(g(x))$ と $g(f(x))$ の式および定義域をそれぞれ求めなさい。

練習問題 2

$f(x) = x + 3$ 、 $g(x) = \frac{1}{x}$ とする。 $f(g(x))$ と $g(f(x))$ の式および定義域をそれぞれ求めなさい。

練習問題 3

$f(x) = \sqrt{x}$ 、 $g(x) = 2x + 1$ とする。 $f(g(x))$ の式と定義域を求めなさい。

練習問題 4

$f(x) = \frac{1}{x+2}$ 、 $g(x) = x - 3$ とする。 $f(g(x))$ の式と定義域を求めなさい。

練習問題 5

$f(x) = \sqrt{x+1}$ 、 $g(x) = x^2 - 2$ とする。 $f(g(x))$ の式と定義域を求めなさい。

練習問題 6

$h(x) = (3x - 2)^2$ を $f(g(x))$ の形で表す関数 f, g の組を 1 組示し、合成して確認しなさい。ただし、表し方は一意に決まるものではない。

練習問題 7

$f(x) = x^2$ 、 $g(x) = x + 1$ とする。「 $f(g(x)) = f(x)g(x)$ 」という主張について、 $x = 1$ の場合で正しいか確認しなさい。また、合成関数と積の違いを説明しなさい。

練習問題 8

$f(x) = \sqrt{x-2}$ 、 $g(x) = -x^2 - 1$ とする。 $f(g(x))$ を定義できる実数 x が存在するか、2 つの入力条件を用いて説明しなさい。

練習問題 1 の解答・解説

$f(g(x))$ は、まず $g(x)$ を計算する。 $g(x) = x^2$ なので、

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(x^2) \\ &= 2x^2 - 1 \end{aligned}$$

となる。 x^2 はすべての実数で定義され、 $f(x) = 2x - 1$ もすべての実数で定義されるため、定義域はすべての実数である。次に、

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(2x - 1) \\ &= (2x - 1)^2 \end{aligned}$$

となる。 $(2x - 1)^2$ もすべての実数で定義されるため、定義域はすべての実数である。したがって、式は異なるが、どちらの定義域もすべての実数である。

練習問題 2 の解答・解説

$f(g(x))$ では、

$$\begin{aligned}f(g(x)) &= f\left(\frac{1}{x}\right) \\&= \frac{1}{x} + 3\end{aligned}$$

となる。 $g(x) = \frac{1}{x}$ が定義されるには、

$$x \neq 0$$

である。また、 f はすべての実数で定義されるため、追加条件はない。

したがって、定義域は $x \neq 0$ である。次に、

$$\begin{aligned}g(f(x)) &= g(x + 3) \\&= \frac{1}{x + 3}\end{aligned}$$

となる。外側の g は入力が 0 になると定義できないため、

$$x + 3 \neq 0$$

である。よって、定義域は $x \neq -3$ である。

練習問題 3 の解答・解説

内側の $g(x) = 2x + 1$ はすべての実数で定義される。外側の $f(x) = \sqrt{x}$ へ入れる値は 0 以上である必要があるため、

$$2x + 1 \geq 0$$

である。したがって、

$$x \geq -\frac{1}{2}$$

となる。よって、

$$f(g(x)) = \sqrt{2x + 1}$$

の定義域は $x \geq -\frac{1}{2}$ である。端点 $x = -\frac{1}{2}$ では根号内が 0 になるため、含まれる。なお、この根号は主平方根を表しており、値は非負である。

練習問題 4 の解答・解説

$$\begin{aligned}f(g(x)) &= f(x - 3) \\&= \frac{1}{(x - 3) + 2} \\&= \frac{1}{x - 1}\end{aligned}$$

となる。内側の $g(x) = x - 3$ はすべての実数で定義される。外側の f は入力 -2 になると分母が 0 になるため、

$$x - 3 \neq -2$$

である。よって、

$$x \neq 1$$

である。したがって、定義域は $x \neq 1$ である。

練習問題 5 の解答・解説

内側の $g(x) = x^2 - 2$ はすべての実数で定義される。外側の $f(x) = \sqrt{x+1}$ へ入れる値は -1 以上である必要があるため、

$$x^2 - 2 \geq -1$$

である。整理すると、

$$x^2 \geq 1$$

となる。したがって、定義域は $x \leq -1$ または $x \geq 1$ である。合成関数の式は、

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(x^2 - 2) \\ &= \sqrt{x^2 - 1} \end{aligned}$$

である。 $x = -1, 1$ では根号内が 0 になるため、両端は含まれる。

練習問題 6 の解答・解説

$h(x) = (3x - 2)^2$ を合成関数で表すには、内側で $3x - 2$ を作り、その結果を二乗する流れにすればよい。例えば、

$$\begin{aligned} g(x) &= 3x - 2 \\ f(x) &= x^2 \end{aligned}$$

とすると、

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(3x - 2) \\ &= (3x - 2)^2 \end{aligned}$$

となる。したがって、この組では $h(x) = f(g(x))$ である。ただし、例えば外側と内側の役割を別の形で分けることもできるため、この表し方だけが唯一のものではない。

練習問題 7 の解答・解説

まず合成関数を計算する。

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(x + 1) \\ &= (x + 1)^2 \end{aligned}$$

一方、積として考えると、

$$f(x)g(x) = x^2(x + 1)$$

である。 $x = 1$ のとき、
合成関数は、

$$f(g(1)) = (1 + 1)^2 = 4$$

である。積は、

$$f(1)g(1) = 1^2(1 + 1) = 2$$

である。したがって、

$$f(g(1)) \neq f(1)g(1)$$

となり、主張は正しくない。合成関数は「出力を次の入力に入れる操作」であり、積は「2つの関数値を掛ける操作」である。記号が似ていても意味は異なる。

練習問題 8 の解答・解説

$f(g(x))$ を定義するには、2 つの条件を満たす必要がある。まず、内側の $g(x)$ は、

$$g(x) = -x^2 - 1$$

であり、すべての実数で定義される。次に、外側の $f(x) = \sqrt{x-2}$ に入力する値は 2 以上でなければならない。したがって、

$$g(x) \geq 2$$

が必要である。代入すると、

$$-x^2 - 1 \geq 2$$

となる。整理すると、

$$-x^2 \geq 3$$

である。しかし、 x^2 は常に 0 以上なので、 $-x^2$ は 0 以下である。したがって、 $-x^2 \geq 3$ を満たす実数 x は存在しない。よって、 $f(g(x))$ を定義できる実数 x は存在しない。