第 198 講 第 2 次導関数と凹凸

学習目標

この講では、第 2 次導関数を利用して関数のグラフの凹凸を判断できるようになることを目標とする。
具体的には、次のことができるようになる。
- $f(x)$ の増減と $f'(x)$ の増減を区別して考える。
- $f''(x)$ の符号からグラフの凹凸を判断する。
- 変曲点の候補を求めた後、実際に凹凸が変化するか確認する。

凹凸を見る理由

関数の増減を調べるとき、$f'(x)$ の符号を見る。
$f'(x) > 0$ ならばグラフは増加し、$f'(x) < 0$ ならばグラフは減少する。
しかし、グラフの曲がり方を調べるには、増減だけでは不十分である。
例えば、グラフが下がっていても、その傾きがだんだん大きくなる場合がある。このような「傾きの変化」を調べる量が $f''(x)$ である。

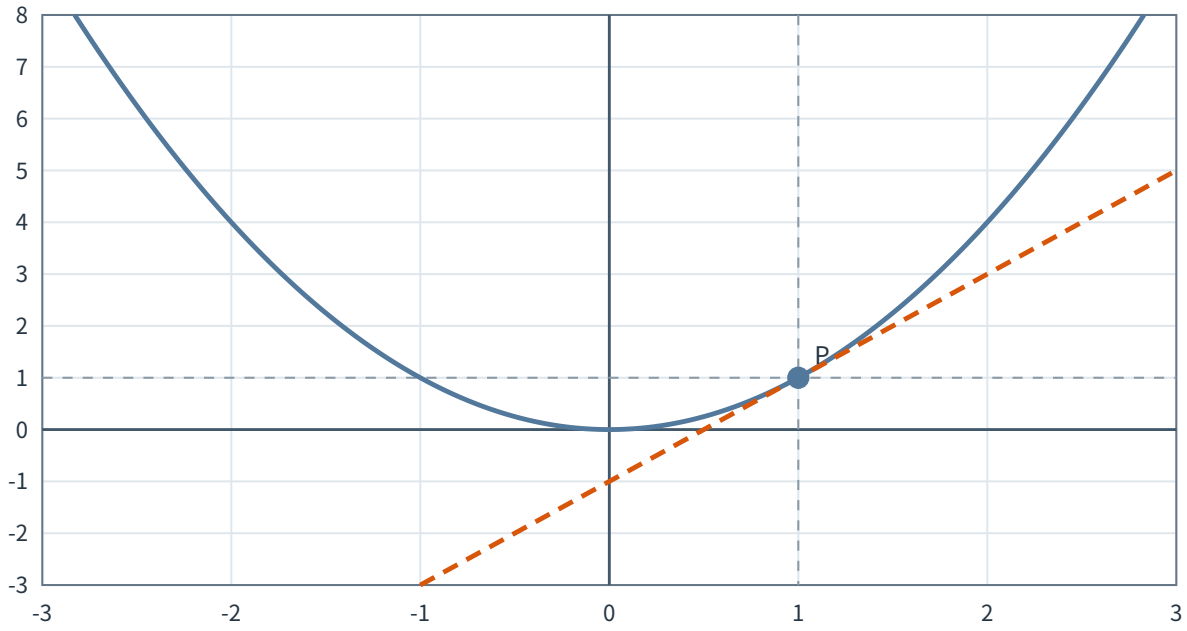

図 1　接点 $(1, 1)$ における $y = x^2$ と接線 $y = 2x - 1$ の位置関係

この図は、接点 $(1, 1)$ における $y = x^2$ の接線を表している。$f''(x) > 0$ のときは右へ進むほど接線の傾きが大きくなり、グラフは接線との位置関係から下に凸になる。

下に凸・上に凸

高校数学では、グラフの凹凸を接線との位置関係で考える。
微分可能な区間で、各点の接線とグラフを比較し、グラフが接線より上側にある形を下に凸、グラフが接線より下側にある形を上に凸という。接点ではグラフと接線の値は等しい。
2 回微分可能な開区間で、すべての点で $f''(x) > 0$ が成り立つならば、その区間では $f'(x)$ が厳密に増加し、グラフは下に凸である。
同様に、2 回微分可能な開区間で、すべての点で $f''(x) < 0$ が成り立つならば、その区間では $f'(x)$ が厳密に減少し、グラフは上に凸である。
つまり、第 2 次導関数は接線の傾きの変化を調べることで、グラフの曲がり方を判断するために利用する。

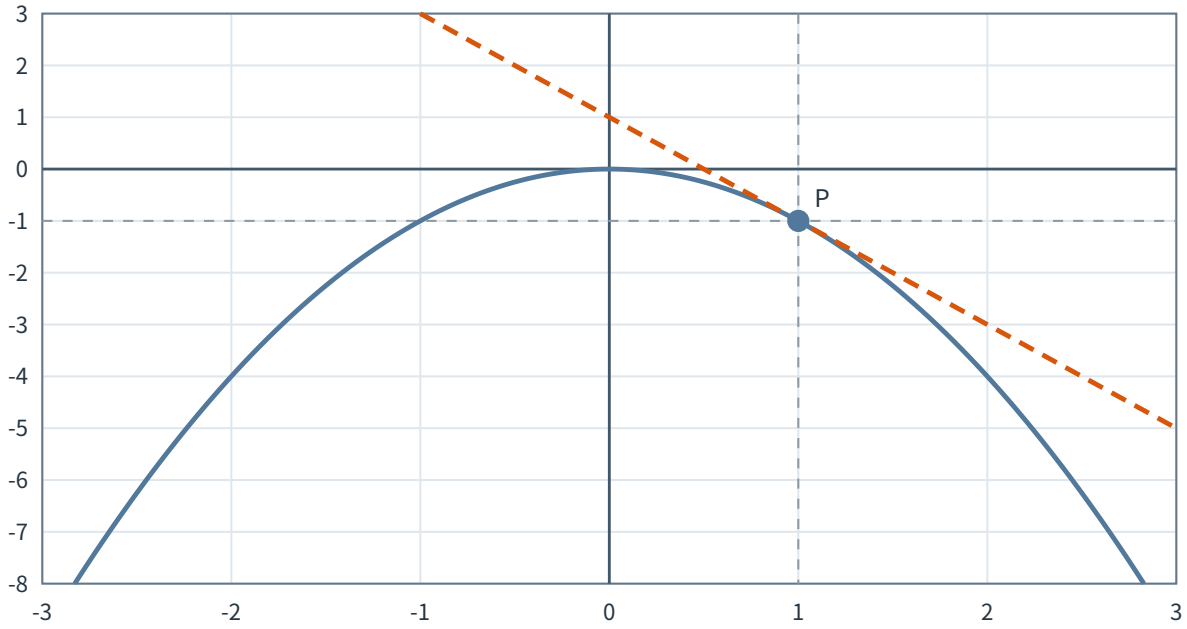

図 2　接点 $(1, -1)$ における $y = -x^2$ と接線 $y = -2x + 1$ の位置関係

この図は、接点 $(1, -1)$ における $y = -x^2$ の接線を表している。$f''(x) < 0$ のときは右へ進むほど接線の傾きが小さくなり、グラフは接線との位置関係から上に凸になる。

fの増減とf'の増減を区別する

混同しやすいのが、$f(x)$ の増減と $f'(x)$ の増減である。
$f(x)$ の増減は、グラフが上がっているか下がっているかを表す。
一方、$f'(x)$ の増減は、グラフの傾きが大きくなっているか小さくなっているかを表す。
例えば、$f'(x) < 0$ かつ $f''(x) > 0$ の場合、グラフ自体は減少しているが、傾きは次第に大きくなっている。
この違いを理解すると、第 2 次導関数が何を調べているのかが分かる。

©ミライコーチング

変曲点

変曲点とは、グラフ上で凹凸が変化する点である。
2 回微分可能な関数では、変曲点の候補を探すために $f''(x)=0$ を利用することがある。
ただし、$f''(a)=0$ だけでは変曲点とは限らない。
例えば、 $f(x)=x^4$ では、 $f''(x)=12x^2$ であり、$x=0$ で $f''(0)=0$ となる。
しかし、$x<0$ でも $x>0$ でも $f''(x)>0$ であり、凹凸は変化しない。
したがって、変曲点を判断するときは、第 2 次導関数が 0 になる点を候補として求めた後、その前後で凹凸が変化するかを確認する必要がある。
なお、一般の変曲点では第 2 次導関数が存在しない場合もある。本講では、必要な区間で 2 回微分可能な関数を中心に扱う。

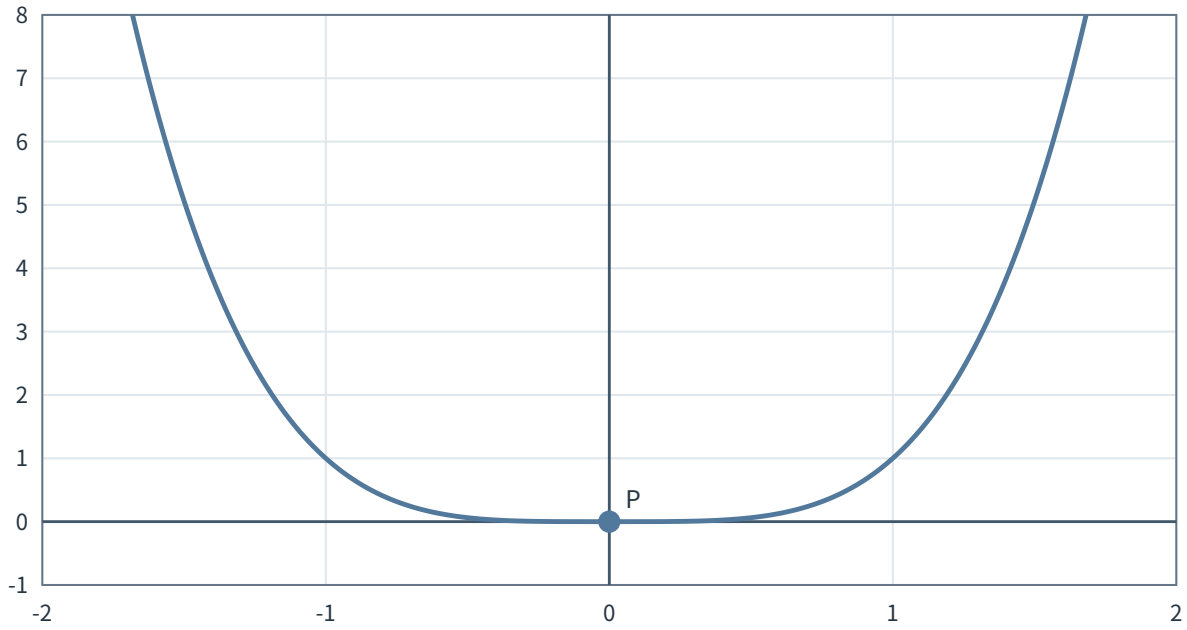

図 3　$f''(0)=0$でも凹凸が変化しない例

この図は、$f''(0)=0$ であっても、左右で同じ下に凸の状態が続けば変曲点ではないことを表している。

例題 1

関数 $f(x)=x^3-3x^2+2$ の凹凸を調べなさい。

例題 1 の解答・解説

まず第 2 次導関数を求める。

$$f'(x)=3x^2-6x$$

$$f''(x)=6x-6$$

次に、 $f''(x)=6(x-1)$ の符号を調べる。
$x<1$ では $f''(x)<0$、$x>1$ では $f''(x)>0$ となる。

	x<1	x=1	x>1
第2次導関数	-	0	+

図 4　$f''(x)$の符号変化

したがって、$x < 1$ では上に凸、$x > 1$ では下に凸である。
凹凸が変化するため、グラフ上の点 $(1, f(1))$ が変曲点である。
$f(1) = 0$ より、変曲点は $(1, 0)$ である。

例題 2

関数 $f(x) = x^3 - 3x$ の変曲点を求めなさい。

例題 2 の解答・解説

第 2 次導関数を求める。

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f''(x) = 6x$$

変曲点の候補を求めるため、 $f''(x) = 0$ を解く。 $6x = 0$ より、候補となる値は $x = 0$ である。
次に符号変化を確認する。

	x<0	x=0	x>0
第2次導関数	-	0	+

図 5　$f''(x)$の符号変化

$x < 0$ では上に凸、$x > 0$ では下に凸となり、凹凸が変化する。
したがって、$x = 0$ に対応するグラフ上の点が変曲点である。
$f(0) = 0$ より、変曲点は $(0, 0)$ である。

例題 3

関数 $f(x) = e^x$ の凹凸を調べなさい。

例題 3 の解答・解説

指数関数を 2 回微分する。

$$f'(x) = e^x$$

$$f''(x) = e^x$$

指数関数はすべての実数で正であるため、全実数で $f''(x) > 0$ が成り立つ。
したがって、関数 $f(x) = e^x$ は全実数の範囲で下に凸である。
また、全実数で凹凸が変化しないため、変曲点は存在しない。

演習問題

練習問題 1

関数 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ の凹凸を調べなさい。

練習問題 2

関数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ の変曲点を求めなさい。

練習問題 3

関数 $f(x) = e^x - x$ の凹凸を調べなさい。

練習問題 4

関数 $f(x) = \log x$（自然対数）の凹凸を調べなさい。ただし、定義域 $x > 0$ に注意して考えなさい。

練習問題 5

関数 $f(x) = \frac{1}{x}$ の凹凸を調べなさい。ただし、定義域は $x \neq 0$ とする。

練習問題 6

関数 $f(x) = x^4$ について、原点 $(0, 0)$ が変曲点であるか調べなさい。

練習問題 7

関数 $f(x) = x^3$ について、増減と凹凸をそれぞれ調べなさい。

©ミライコーチング

練習問題 8

関数 $f(x) = x^3 - 6x$ について、次の問いに答えなさい。
(1) 凹凸を調べなさい。
(2) 変曲点の座標を求めなさい。

演習問題の解答・解説

練習問題 1 の解答・解説

第 2 次導関数を求める。

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$$

$$f''(x) = 6x + 6$$

$f''(x) = 6(x+1)$ であるから、$x = -1$ を境に符号が変化する。
$x < -1$ では $f''(x) < 0$ なので上に凸、$x > -1$ では $f''(x) > 0$ なので下に凸である。
したがって、凹凸は $x = -1$ の前後で変化する。

練習問題 2 の解答・解説

第 2 次導関数を求める。

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f''(x) = 6x - 12$$

変曲点の候補を求めるため、$f''(x) = 0$ とする。
$6x - 12 = 0$ より、候補は $x = 2$ である。
$x < 2$ では $f''(x) < 0$ なので上に凸、$x > 2$ では $f''(x) > 0$ なので下に凸となる。
凹凸が変化するため、$x = 2$ に対応するグラフ上の点が変曲点である。
$f(2) = 8 - 24 + 18 = 2$ より、変曲点は $(2, 2)$ である。

練習問題 3 の解答・解説

関数を 2 回微分する。

$$f'(x) = e^x - 1$$

$$f''(x) = e^x$$

指数関数は全実数で正なので、すべての x で $f''(x) > 0$ である。
したがって、全実数の範囲で下に凸である。
また、凹凸が変化する点はないため、変曲点は存在しない。

©ミライコーチング

練習問題 4 の解答・解説

自然対数の定義域は $x > 0$ である。
2 回微分すると、次の式を得る。

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

定義域 $x > 0$ では $-\frac{1}{x^2} < 0$ である。
したがって、定義域全体で上に凸である。
また、定義域内で凹凸が変化する点はないため、変曲点は存在しない。

練習問題 5 の解答・解説

関数 $f(x) = \frac{1}{x}$ の定義域は $x \neq 0$ である。
2 回微分すると、次の式を得る。

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$x < 0$ では $f''(x) < 0$ なので上に凸である。
$x > 0$ では $f''(x) > 0$ なので下に凸である。
ただし、$x = 0$ は定義域外であり、グラフ上の点ではない。
したがって、$x = 0$ を変曲点とすることはできない。
凹凸は $(-\infty, 0)$ で上に凸、$(0, \infty)$ で下に凸である。

練習問題 6 の解答・解説

2 回微分する。

$$f'(x) = 4x^3$$

$$f''(x) = 12x^2$$

原点では $f''(0) = 0$ となるため、候補になる。
しかし、$x < 0$ でも $x > 0$ でも $12x^2 > 0$ である。
したがって、原点の左右で凹凸は変化しない。
よって、原点 $(0, 0)$ は変曲点ではない。

©ミライコーチング

練習問題 7 の解答・解説

まず増減を調べる。
導関数は $f'(x) = 3x^2$ である。
関数 $f(x) = x^3$ について、任意の $x_1 < x_2$ を考える。
差を因数分解すると、次の式を得る。

$$x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$$

ここで、$x_2 - x_1 > 0$ である。また、

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3x_2^2}{4}$$

であり、異なる 2 実数 x_1, x_2 に対して正である。
したがって、$x_2^3 - x_1^3 > 0$ となり、$x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$ である。よって、$f(x) = x^3$ は全実数で厳密に増加する。
次に凹凸を調べる。
第 2 次導関数は $f''(x) = 6x$ である。
$x < 0$ では $f''(x) < 0$ なので上に凸、$x > 0$ では $f''(x) > 0$ なので下に凸である。
凹凸が変化するため、変曲点はグラフ上の点 $(0, 0)$ である。

練習問題 8 の解答・解説

(1)
第 2 次導関数を求める。

$$f'(x) = 3x^2 - 6$$

$$f''(x) = 6x$$

$f''(x) = 0$ より、候補は $x = 0$ である。
$x < 0$ では $f''(x) < 0$ なので上に凸、$x > 0$ では $f''(x) > 0$ なので下に凸である。
したがって、凹凸は $x = 0$ の前後で変化する。
(2)
変曲点の座標を求める。
$f(0) = 0$ より、変曲点は $(0, 0)$ である。