

第 55 講 数え上げと樹形図

学習目標

- ・ 場合を数えるとき、漏れと重複を避けるために条件を整理できる。
- ・ 小規模な場合について、すべての場合を順序よく列挙できる。
- ・ 選択が何段階かに分かれる場面を、樹形図で整理できる。
- ・ 樹形図の枝先と実際の場合を対応させて、場合の数を数えられる。

場合を数えるときに大切なこと

思いついた順に書くだけでは危ない

いくつかの選び方があるとき、「全部で何通りあるか」を調べることを**数え上げる**といいます。数え上げで最も大切なのは、

- ・ 数え忘れないこと
- ・ 同じ場合を 2 回以上数えないこと

です。

たとえば、赤・青・白の 3 色から 1 色を選ぶなら、

- ・ 赤
- ・ 青
- ・ 白

の 3 通りです。

この程度なら簡単ですが、選択が 2 回、3 回と続くと、頭の中だけでは漏れや重複が起こりやすくなります。

そこで、一定の順序で列挙したり、樹形図を使ったりして整理します。

場合の数

条件を満たす異なる場合が全部でいくつあるかを表す数を、**場合の数**といいます。

数え上げの基本

場合を数えるときは、

1. 何を 1 つの場合として区別するか決める。
2. 一定の順序で書き出す。
3. 漏れがないか確認する。
4. 同じ場合を重複して数えていないか確認する。

という流れで整理します。

順序を決めて列挙する

最初の選択を固定して整理する

上着として「白・黒」の 2 種類、帽子として「赤・青・緑」の 3 種類があり、それぞれ 1 つずつ選ぶとします。

思いついた組合せをばらばらに書くのではなく、まず上着を白に固定すると、

- ・ 白・赤
- ・ 白・青

・白・緑

と整理できます。

次に上着を黒に固定すると、

・黒・赤

・黒・青

・黒・緑

です。

したがって、全部で 6 通りあります。

このように、最初の選択を 1 つずつ固定すると、漏れを防ぎやすくなります。

固定して並べる

複数の条件があるときは、最初の条件を 1 つずつ固定して、その中で次の選択をすべて並べます。「白の場合を全部、その次に黒の場合を全部」のようにまとまりを作ると、検算しやすくなります。

順序が違えば別の場合かを確認する

「赤を選んでから青を選ぶ」と「青を選んでから赤を選ぶ」が同じ場合なのか、別の場合なのかは問題によって異なります。

数え始める前に、何を区別する問題なのかを確認します。

樹形図で選択の流れを表す

樹形図

選択が何段階かに分かれるとき、選択枝を枝分かれさせて表した図を**樹形図**といいます。最初の選択から枝を伸ばし、その先から次の選択の枝を伸ばします。最後の枝先 1 つが、1 つの場合に対応します。

2 段階の選択を樹形図にする

上着を「白・黒」から 1 つ選び、そのあと帽子を「赤・青・緑」から 1 つ選ぶ場面を考えます。樹形図では、まず上着で枝分かれし、その先で帽子について枝分かれさせます。

1 段階目（上着）	2 段階目（帽子）	枝先に対応する組合せ
白	赤・青・緑	白・赤、白・青、白・緑
黒	赤・青・緑	黒・赤、黒・青、黒・緑

枝先は、

・白・赤

・白・青

・白・緑

・黒・赤

・黒・青

・黒・緑

の 6 個です。

したがって、場合の数は 6 です。

枝先を数える

樹形図では、途中の点を数えるのではなく、条件を最後まで選び終えた枝先を数えます。
枝先 1 つが 1 つの場合に対応していることを確認します。

樹形図は選択の順序に沿ってかく

1 段階目から順に枝を伸ばす

飲み物を「水・お茶」から選び、そのあとデザート「ゼリー・プリン」から選ぶとします。
このとき、

1. 飲み物を選ぶ。
2. デザートを選ぶ。

という順に枝を伸ばします。

1 段階目（飲み物）	2 段階目（デザート）	枝先に対応する組合せ
水	ゼリー・プリン	水・ゼリー、水・プリン
お茶	ゼリー・プリン	お茶・ゼリー、お茶・プリン

枝先は 4 個なので、4 通りです。

この図のよいところは、「水を選んだ場合」「お茶を選んだ場合」が分かれているため、漏れや重複を目で確認しやすいことです。

途中で条件を変えない

同じ段階では、同じ種類の選択枝を並べます。

たとえば、一方の枝では「デザート」、もう一方の枝では突然「飲み物」を選ぶような樹形図にすると、何を数えているか分からなくなります。

各段階で何を選んでいるかをそろえます。

選べない場合がある樹形図

枝の数はいつも同じとは限らない

数字 1, 2, 3 から異なる 2 つを順に選ぶとします。

1 回目に 1 を選んだら、2 回目には 1 は選べないので、2, 3 のどちらかです。

同様に、1 回目に 2 を選んだら 2 回目は 1, 3、1 回目に 3 を選んだら 2 回目は 1, 2 です。

1 回目	2 回目を選ぶ数	枝先に対応する並び
1	2, 3	1 → 2, 1 → 3
2	1, 3	2 → 1, 2 → 3
3	1, 2	3 → 1, 3 → 2

枝先は 6 個です。

このように、条件によって選べない枝があるときこそ、樹形図が役立ちます。

条件に合わない枝は伸ばさない

樹形図では、問題の条件を満たす選択枝だけを枝として伸ばします。

「同じものをもう一度選ばない」という条件があるなら、2 回目には 1 回目と同じ枝を作りません。

漏れと重複を確認する

枝先を実際の結果として読み直す

樹形図を書いたら、枝先だけを見て終わりにせず、実際の結果として読み直します。
たとえば、1, 2, 3 から異なる 2 つを順に選んだ場合の枝先は、

- 1 → 2
- 1 → 3
- 2 → 1
- 2 → 3
- 3 → 1
- 3 → 2

です。

1 回目を 1, 2, 3 の順に固定しているため、漏れがないことを確認できます。

また、各枝先は選ぶ順序が異なるので、同じ結果を重複して書いていないことも確認できます。

樹形図の検算

樹形図を書いたあとは、

- 各段階の選択枝を全部出しているか
- 条件に反する枝を作っていないか
- 枝先に同じ場合が重複していないか

を確認します。

例題

例題 1

ジュースを「りんご・ぶどう」の 2 種類から 1 つ選び、パンを「あん・クリーム・ジャム」の 3 種類から 1 つ選びます。

選び方をすべて列挙し、全部で何通りあるか求めなさい。

例題 1 の解答・解説

まず、ジュースをりんごに固定すると、

- りんご・あん
- りんご・クリーム
- りんご・ジャム

です。

次に、ジュースをぶどうに固定すると、

- ぶどう・あん
- ぶどう・クリーム
- ぶどう・ジャム

です。

漏れも重複もないので、全部で 6 通りです。

例題 2

文字 A, B, C から異なる 2 文字を順に選びます。
樹形図を考えて、できる並びをすべて書き、全部で何通りあるか求めなさい。

例題 2 の解答・解説

1 文字目を固定して整理します。

1 文字目が A のとき、

- AB
- AC

です。

1 文字目が B のとき、

- BA
- BC

です。

1 文字目が C のとき、

- CA
- CB

です。

したがって、

$$AB, AC, BA, BC, CA, CB$$

の 6 通りです。

例題 3

出発点から、最初に「左・右」のどちらかへ進みます。
左へ進んだ場合は、そのあと「上・下」のどちらかへ進みます。
右へ進んだ場合は、そのあと「上・中央・下」のいずれかへ進みます。
すべての進み方を樹形図の考え方で整理し、全部で何通りあるか求めなさい。

例題 3 の解答・解説

左から始まる場合は、

- 左・上
- 左・下

の 2 通りです。

右から始まる場合は、

- 右・上
- 右・中央
- 右・下

の 3 通りです。

したがって、枝先は全部で 5 個あり、5 通りです。

この問題では、最初の選択によって 2 段階目の枝の数が異なるため、樹形図で整理すると漏れを防ぎやすくなります。

演習問題

練習問題 1

ノートを「白・青」の 2 種類から 1 冊選び、ペンを「黒・赤」の 2 種類から 1 本選びます。
すべての選び方を列挙し、全部で何通りあるか答えなさい。

練習問題 2

数字 1, 2, 3 から異なる 2 つを順に選びます。
できる選び方をすべて列挙し、全部で何通りあるか答えなさい。

練習問題 3

最初に「東・西」のどちらかを選び、そのあと「赤・青・白」のいずれかを選びます。
樹形図の枝先に対応する結果をすべて書き、全部で何通りあるか答えなさい。

練習問題 4

文字 P, Q, R から 2 文字を順に選びます。同じ文字を 2 回選んでもよいものとします。
すべての場合を列挙し、全部で何通りあるか答えなさい。

練習問題 5

数字 1, 2, 3, 4 から異なる 2 つを順に選びます。
1 回目に 1 を選んだ場合にできる枝先をすべて書きなさい。
また、同じように 1 回目を 2, 3, 4 とした場合も整理し、全体で何通りあるか答えなさい。

練習問題 6

ある道では、最初に「A 方向・B 方向」のどちらかへ進みます。
A 方向へ進んだあとは「上・下」の 2 方向から選びます。
B 方向へ進んだあとは「左・中央・右」の 3 方向から選びます。
すべての進み方を列挙し、全部で何通りあるか答えなさい。

練習問題 7

ある生徒は、数字 1, 2, 3 から異なる 2 つを順に選ぶ場合を、
12, 13, 21, 23, 31
と書きました。
この列挙の問題点を説明し、足りない場合を答えなさい。

練習問題 8

赤・青の 2 枚のカードから 1 枚を選び、そのあと丸・三角の 2 つの記号から 1 つを選び、最後に「大・小」の 2 種類から 1 つを選びます。

樹形図を考えて、全部で何通りの結果があるか答えなさい。

また、その結果をすべて列挙しなさい。

練習問題 9

次の 2 つの列挙のうち、漏れや重複がないものを選び、理由を説明しなさい。

数字 1, 2, 3 から異なる 2 つを順に選ぶ場合を数えます。

- ・ (ア) 12, 13, 21, 23, 31, 32
- ・ (イ) 12, 13, 21, 23, 31, 32, 12

演習問題の解答・解説

練習問題 1 の解答・解説

すべての選び方は、

- ・ 白・黒
- ・ 白・赤
- ・ 青・黒
- ・ 青・赤

です。

したがって、全部で 4 通りです。

練習問題 2 の解答・解説

1 回目を固定して整理すると、

- ・ 1 → 2
- ・ 1 → 3
- ・ 2 → 1
- ・ 2 → 3
- ・ 3 → 1
- ・ 3 → 2

です。

したがって、全部で 6 通りです。

練習問題 3 の解答・解説

結果は、

- ・ 東・赤
- ・ 東・青
- ・ 東・白
- ・ 西・赤
- ・ 西・青
- ・ 西・白

です。

したがって、枝先は 6 個あり、全部で 6 通りです。

練習問題 4 の解答・解説

同じ文字を 2 回選んでもよいので、1 文字目ごとに整理すると、

- PP
- PQ
- PR
- QP
- QQ
- QR
- RP
- RQ
- RR

です。

したがって、全部で 9 通りです。

練習問題 5 の解答・解説

1 回目が 1 のときは、

- $1 \rightarrow 2$
- $1 \rightarrow 3$
- $1 \rightarrow 4$

です。

1 回目が 2 のときは、

- $2 \rightarrow 1$
- $2 \rightarrow 3$
- $2 \rightarrow 4$

です。

1 回目が 3 のときは、

- $3 \rightarrow 1$
- $3 \rightarrow 2$
- $3 \rightarrow 4$

です。

1 回目が 4 のときは、

- $4 \rightarrow 1$
- $4 \rightarrow 2$
- $4 \rightarrow 3$

です。

枝先を数えると、全部で 12 通りです。

練習問題 6 の解答・解説

A 方向から始まる場合は、

- ・ A・上
- ・ A・下

です。

B 方向から始まる場合は、

- ・ B・左
- ・ B・中央
- ・ B・右

です。

したがって、全部で 5 通りです。

練習問題 7 の解答・解説

1 回目が 3 の場合には、2 回目として 1 と 2 を選べます。

列挙には 31 はありますが、32 がありません。

したがって、32 が数え漏れています。

正しくは、

12, 13, 21, 23, 31, 32

の 6 通りです。

練習問題 8 の解答・解説

赤を選んだ場合は、

- ・ 赤・丸・大
- ・ 赤・丸・小
- ・ 赤・三角・大
- ・ 赤・三角・小

です。

青を選んだ場合は、

- ・ 青・丸・大
- ・ 青・丸・小
- ・ 青・三角・大
- ・ 青・三角・小

です。

したがって、枝先は全部で 8 個あり、8 通りです。

練習問題 9 の解答・解説

漏れや重複がないのは (ア) です。

(ア) には、

12, 13, 21, 23, 31, 32

が 1 回ずつ含まれています。

一方、(イ) では 12 が 2 回書かれているので、同じ場合を重複して数えています。