

第 85 講 複素数

学習目標

- ・実数だけでは表せない数を導入する必要性を説明できる。
- ・虚数単位 i と複素数 $a + bi$ の意味を説明できる。
- ・複素数の実部と虚部を正しく読み取ることができる。
- ・2 つの複素数が等しいための条件を使うことができる。
- ・複素数を実数・虚数・純虚数に正しく分類できる。

実数だけでは解けない方程式

数の範囲を広げる理由

方程式 $x^2 = -1$ を考える。

実数 x の平方は必ず 0 以上であるため、実数の範囲では $x^2 = -1$ を満たす数は存在しない。

しかし、「平方すると -1 になる数」を新しく認めれば、このような方程式も扱えるようになる。そこで、実数の範囲を広げて新しい数を導入する。

この考え方は、これまで数の範囲を広げてきた流れと同じである。たとえば、自然数だけでは $2 - 5$ を表せないため整数へ広げ、整数だけでは $1 \div 2$ を表せないため有理数へ広げてきた。複素数も、実数だけでは扱えない式を扱うための数の拡張である。

虚数単位 i

平方すると -1 になる数の 1 つを i と表し、

$$i^2 = -1$$

と定める。

この i を虚数単位という。

i は文字ではない

i は、未知数や自由に値を変えられる文字ではない。 $i^2 = -1$ を満たす虚数単位を表す記号である。

特に、 $i = \sqrt{-1}$ という形だけを手掛かりに実数の平方根とまったく同じ感覚で扱うのではなく、基本となる関係 $i^2 = -1$ を押さえることが重要である。

複素数の形

複素数

a, b を実数とするとき、

$$a + bi$$

の形で表される数を複素数という。

a をこの複素数の実部、 b を虚部という。

実部と虚部を見分ける

複素数では、「 i が付いていない部分」と「 i の係数」を分けて見る。

たとえば、 $3 - 5i$ では、 i が付いていない 3 が実部であり、 i の係数である -5 が虚部である。

したがって、

- $3 - 5i$ の実部は 3
- $3 - 5i$ の虚部は -5

である。

虚部は $-5i$ ではなく、 -5 であることに注意する。

複素数を見る基本の形

複素数を見たら、 $a + bi$ の形と比べる。

- 実部： a
- 虚部： b

という対応を確認するのが基本である。

例題 1

次の複素数の実部と虚部を答えよ。

- (1) $4 + 3i$
- (2) $-2 - 7i$
- (3) $6i$
- (4) -5

例題 1 の解答・解説

$a + bi$ の形と比べる。

(1) $4 + 3i$ では $a = 4$, $b = 3$ である。したがって、実部は 4 、虚部は 3 である。

(2) $-2 - 7i = -2 + (-7)i$ である。したがって、実部は -2 、虚部は -7 である。

(3) $6i = 0 + 6i$ と考える。したがって、実部は 0 、虚部は 6 である。

(4) $-5 = -5 + 0i$ と考える。したがって、実部は -5 、虚部は 0 である。

i が見えない場合でも、虚部が存在しないのではなく、虚部が 0 であると考えることが重要である。

複素数の等号

実部と虚部を別々に比べる

2 つの複素数 $a + bi$ と $c + di$ があるとする。

これらが同じ複素数であるためには、実数の部分どうしと、 i の係数どうしがそれぞれ一致する必要がある。

したがって、 $a + bi = c + di$ であることと、 $a = c$, $b = d$ であることは同値である。

複素数の等号では、「実部と虚部を別々に比べる」という見方が中心となる。

複素数が等しい条件

a, b, c, d が実数であるとき、 $a + bi = c + di$ であることと $a = c$, $b = d$ であることは同値である。

例題 2

x, y を実数とする。次の等式を満たす x, y の値を求めよ。

$$x + yi = 3 - 4i$$

例題 2 の解答・解説

複素数が等しいので、実部どうし、虚部どうしを比べる。
実部について、

$$x = 3$$

である。
虚部について、

$$y = -4$$

である。
したがって、 $x = 3, y = -4$ である。

例題 3

x, y を実数とする。次の等式を満たす x, y の値を求めよ。

$$(2x - 1) + (y + 3)i = 5 - 2i$$

例題 3 の解答・解説

複素数が等しいので、実部と虚部をそれぞれ比べる。
実部から、

$$2x - 1 = 5$$

である。これを解くと、

$$2x = 6$$

より、 $x = 3$ である。
虚部から、

$$y + 3 = -2$$

である。これを解くと、 $y = -5$ である。
したがって、 $x = 3, y = -5$ である。

実数と虚数**実数と虚数**

複素数 $a + bi$ について、虚部 b に注目する。

- $b = 0$ のとき、 $a + bi = a$ となるので**実数**である。
- $b \neq 0$ のとき、**虚数**である。

したがって、すべての実数は複素数の一部である。

純虚数

複素数 $a + bi$ において、

$$a = 0, \quad b \neq 0$$

であるとき、その複素数を**純虚数**という。

たとえば、 $3i$ 、 $-5i$ は純虚数である。

分類では虚部を見る

複素数を実数か虚数かに分類するとき、決め手となるのは虚部が 0 かどうかである。

たとえば、7 は $7 + 0i$ と書けるので実数である。一方、 $7 + i$ は虚部が 1 なので虚数である。

さらに、虚数のうち実部が 0 のものだけが純虚数である。したがって、 $7 + i$ は虚数ではあるが純虚数ではない。

0 の分類

$0 = 0 + 0i$ であるため、0 は実数である。

純虚数では $b \neq 0$ が必要であるため、0 は純虚数ではない。

演習問題**演習問題 1**

次の複素数の実部と虚部を答えよ。

(1) $2 + 5i$

(2) $-6 + i$

(3) $-4i$

(4) 9

演習問題 2

次の数を $a + bi$ の形で表し、実部と虚部を答えよ。

(1) $7i$

(2) -3

(3) 0

演習問題 3

次の複素数を、実数・虚数のどちらかに分類せよ。また、純虚数であるものをすべて選べ。

(1) 5

(2) $-2i$

(3) $3 + 4i$

(4) 0

(5) i

演習問題 4

x, y を実数とする。次の等式を満たす x, y の値を求めよ。

$$x + yi = -7 + 2i$$

演習問題 5

x, y を実数とする。次の等式を満たす x, y の値を求めよ。

$$(x + 2) + (y - 1)i = 6 + 3i$$

演習問題 6

a, b を実数とする。複素数 $a + (b - 4)i$ が実数であるとき、 b の値を求めよ。

演習問題 7

a, b を実数とする。複素数 $(a + 1) + bi$ が純虚数であるための a, b の条件を答えよ。

演習問題の解答・解説

演習問題 1 の解答・解説

$a + bi$ の形と比べる。

- (1) $2 + 5i$ の実部は 2、虚部は 5 である。
- (2) $-6 + i = -6 + 1i$ であるため、実部は -6 、虚部は 1 である。
- (3) $-4i = 0 - 4i$ であるため、実部は 0、虚部は -4 である。
- (4) $9 = 9 + 0i$ であるため、実部は 9、虚部は 0 である。

演習問題 2 の解答・解説

- (1) $7i = 0 + 7i$ である。したがって、実部は 0、虚部は 7 である。
 - (2) $-3 = -3 + 0i$ である。したがって、実部は -3 、虚部は 0 である。
 - (3) $0 = 0 + 0i$ である。したがって、実部は 0、虚部も 0 である。
- i が付いた項や実数部分が見えないときは、係数 0 を補って $a + bi$ の形にすると判断しやすい。

演習問題 3 の解答・解説

虚部が 0 なら実数、虚部が 0 でなければ虚数である。また、実部が 0 で虚部が 0 でない虚数が純虚数である。

- (1) $5 = 5 + 0i$ なので実数である。
 - (2) $-2i = 0 - 2i$ なので虚数であり、さらに実部が 0 なので純虚数である。
 - (3) $3 + 4i$ は虚部が 4 なので虚数である。実部は 3 なので純虚数ではない。
 - (4) $0 = 0 + 0i$ なので実数である。虚部が 0 なので純虚数ではない。
 - (5) $i = 0 + 1i$ なので虚数であり、純虚数でもある。
- したがって、純虚数は (2)、(5) である。

演習問題 4 の解答・解説

複素数が等しいので、実部どうし、虚部どうしを比べる。

実部から $x = -7$ である。

虚部から $y = 2$ である。

したがって、 $x = -7$, $y = 2$ である。

演習問題 5 の解答・解説

実部と虚部をそれぞれ比べる。

実部から、

$$x + 2 = 6$$

なので、 $x = 4$ である。

虚部から、

$$y - 1 = 3$$

なので、 $y = 4$ である。

したがって、 $x = 4$, $y = 4$ である。

演習問題 6 の解答・解説

複素数が実数になるためには、虚部が 0 でなければならない。

$a + (b - 4)i$ の虚部は $b - 4$ なので、

$$b - 4 = 0$$

である。

したがって、 $b = 4$ である。

実部 a の値は、この条件には関係しない。

演習問題 7 の解答・解説

純虚数であるためには、実部が 0 であり、虚部が 0 ではないことが必要である。

$(a + 1) + bi$ の実部は $a + 1$ なので、

$$a + 1 = 0$$

より、 $a = -1$ である。

また、虚部は b なので、

$$b \neq 0$$

でなければならない。

したがって、条件は $a = -1$, $b \neq 0$ である。