

第 172 講 はさみうちの原理

学習目標

数列の極限を考えると、直接極限を求めにくい数列を、上下からはさんで判断する考え方を理解する。

はさむために必要な条件を正しく確認し、はさみうちの原理を用いて数列の極限を求められるようになる。

はさみうちの考え方

数列の極限では、数列そのものの変化が複雑でも、近づく場所が分かる別の数列ではさんで考えることがある。

例えば、ある数列 b_n が直接扱いにくい場合でも、常に $a_n \leq b_n \leq c_n$ が成り立ち、さらに a_n と c_n が同じ値へ近づくなら、間にはさまれた b_n もその値へ近づく。

重要なのは、真ん中の数列 b_n の収束を先に仮定しないことである。上下の数列の動きから、真ん中の数列の極限を決定する。

はさみうちの原理

数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 、 $\{c_n\}$ は、 n を正整数とする無限数列であり、各項は実数である。また、共通の極限 L は有限の実数とする。

ある正整数 N_0 が存在して、 N_0 以降のすべての正整数 n で

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

が成り立つとする。

さらに、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$$

であるならば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$$

である。

ただし、 b_n 自身が収束することは、この原理を使う前に仮定しない。

考え方の要点

任意の $\varepsilon > 0$ を考える。

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ であるから、ある正整数 N_1 が存在して、 $n \geq N_1$ ならば $L - \varepsilon < a_n$ が成り立つ。

また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ であるから、ある正整数 N_2 が存在して、 $n \geq N_2$ ならば $c_n < L + \varepsilon$ が成り立つ。

さらに、ある正整数 N_0 以降では

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

が成り立つ。

N_0, N_1, N_2 以上の正整数 N を選ぶと、 $n \geq N$ でこれら 3 つの条件が同時に成り立つため、

$$L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon$$

となる。

したがって、 $|b_n - L| < \varepsilon$

が成り立ち、 b_n は L に収束する。

最初の有限個の項が条件を満たさなくても、極限は十分先の項だけで決まるため、極限の値には影響しない。

注意

上下の数列の極限が異なる場合、この原理だけでは真ん中の数列の極限は判断できない。

また、はさまれた数列が必ず発散するとは限らない。上下の情報だけでは結論できない場合もある。

有限個の項を表や図で確認しただけで、すべての正整数 n に対する性質を証明したことにはならない。

例題 1

全ての正整数 n で

$$2 - \frac{1}{n} \leq b_n \leq 2 + \frac{3}{n}$$

を満たす実数列 $\{b_n\}$ の極限を求めよ。

例題 1 の解答・解説

上下の数列を考える。

左側の数列は $a_n = 2 - \frac{1}{n}$ であり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 2$$

となる。

右側の数列は $c_n = 2 + \frac{3}{n}$ であり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3}{n}\right) = 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} = 2$$

となる。

また、すべての正整数 n で

$$2 - \frac{1}{n} \leq b_n \leq 2 + \frac{3}{n}$$

が成り立つ。

上下の数列はともに 2 に収束するため、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$$

である。

例題 2

数列 $b_n = \frac{1+(-1)^n}{n+1}$ の極限を求めよ。

例題 2 の解答・解説

$(-1)^n$ は、 n が奇数のとき -1 、 n が偶数のとき 1 となる。

したがって、奇数項では $b_n = \frac{1-1}{n+1} = 0$ となり、偶数項では

$$b_n = \frac{1+1}{n+1} = \frac{2}{n+1}$$

となる。

よって、常に

$$0 \leq b_n \leq \frac{2}{n+1}$$

が成り立つ。

下側の数列は定数列 0 であるため、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

となる。

上側の数列については、

$$\frac{2}{n+1} = \frac{\frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}}$$

であり、分子は 0 、分母は 1 に近づき、分母の極限は $1 \neq 0$ であるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0$$

となる。

したがって、上下の数列はともに 0 に近づき、等号を含むはさみうちの原理を適用できる。

したがって、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

である。

奇数項と偶数項で値の形は異なるが、どちらも 0 へ近づくため、極限は存在する。

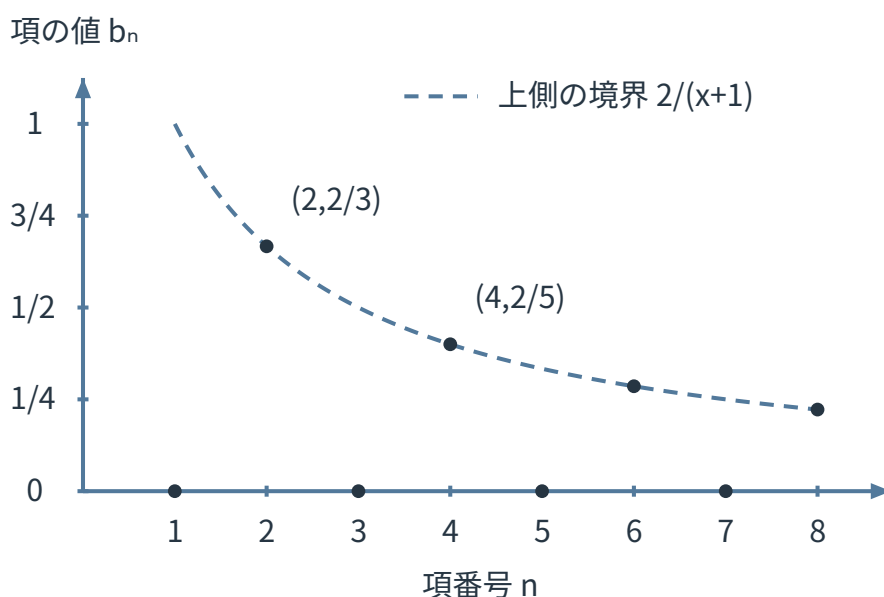


図1 黒点は数列 b_n の初めの8項である。奇数項は0、偶数項は上側の境界 $2/(n+1)$ に等しい。破線は実数 x について上側の境界 $2/(x+1)$ を補助的に描いた曲線であり、数列の点をつなぐ線ではない。下側の境界は0で、等号を含む。全項の極限はこの8点だけで証明せず、本文の一般式とはさみうちの原理から説明する。縦横の縮尺は異なる。

例題 3

数列 $b_n = \frac{n}{n^2 + 2 + \cos n}$ について、次の問いに答えよ。ただし、 $\cos n$ は n ラジアン の余弦とし、 $-1 \leq \cos n \leq 1$ を用いてよい。

- (1) 分母が正であることを示せ。
- (2) $0 < b_n \leq \frac{1}{n}$ を示せ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ。

例題 3 の解答・解説

(1)
 $-1 \leq \cos n$ より、

$$n^2 + 2 + \cos n \geq n^2 + 2 - 1$$

したがって、

$$n^2 + 2 + \cos n \geq n^2 + 1$$

となる。

正整数 n では $n^2 + 1 > 0$ であるため、 $n^2 + 2 + \cos n > 0$ であり、分母は正である。

(2) 上から評価したいので、同じ正の分子 n を持つ分数では、正の分母を小さくすると分数全体は大きくなることに注意する。

$$n^2 + 2 + \cos n \geq n^2 + 1$$

より、

$$\frac{n}{n^2 + 2 + \cos n} \leq \frac{n}{n^2 + 1}$$

となる。
さらに、

$$n^2 + 1 \geq n^2$$

であるから、

$$\frac{n}{n^2 + 1} \leq \frac{n}{n^2}$$

となる。
よって、

$$b_n \leq \frac{1}{n}$$

である。
また、分子 n は正であり、分母も正なので、 $b_n > 0$ である。
したがって、

$$0 < b_n \leq \frac{1}{n}$$

を得る。
(3) 上下の数列を考える。

$$0 \leq b_n \leq \frac{1}{n}$$

であり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

また、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

である。
したがって、はさみうちの原理より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

である。
ここでは $\cos n$ 自体の極限を求める必要はなく、常に成り立つ大小関係だけを利用している。

演習問題

練習問題 1

実数列 $\{b_n\}$ が、全ての正整数 n で

$$5 - \frac{2}{n} \leq b_n \leq 5 + \frac{1}{n}$$

を満たすとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ。

練習問題 2

数列 $b_n = \frac{\sin n}{n}$ について、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ。
ただし、 $\sin n$ は n ラジアン の正弦とし、 $-1 \leq \sin n \leq 1$ を用いてよい。

練習問題 3

数列 $b_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ について、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ。

練習問題 4

数列 $b_n = \frac{\cos^2 n}{n+1}$ について、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ。
ただし、 $\cos n$ は n ラジアン の余弦とし、 $-1 \leq \cos n \leq 1$ を用いてよい。

練習問題 5

数列 $b_n = 3 + \frac{\sin n}{n^2}$ について、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ。
ただし、 $\sin n$ は n ラジアン の正弦とし、 $-1 \leq \sin n \leq 1$ を用いてよい。

練習問題 6

実数列 $\{b_n\}$ が、全ての正整数 n で

$$|b_n + 2| \leq \frac{4}{n}$$

を満たすとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ。

練習問題 7

実数列 $\{b_n\}$ は、最初の 9 項は任意の実数であり、 $n \geq 10$ のすべての正整数 n で

$$-\frac{1}{n} \leq b_n \leq \frac{2}{n}$$

を満たす。

このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ。

練習問題 8

実数列 $\{b_n\}$ が全ての正整数 n で

$$0 \leq b_n \leq 1$$

を満たすとする。

この条件だけから $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を一意に決められるか答えよ。

また、決められない場合は、その理由を示せ。

練習問題 1 の解答・解説

上下の数列を考える。

$$a_n = 5 - \frac{2}{n}, \quad c_n = 5 + \frac{1}{n}$$

とおく。

n が大きくなると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

であるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 5$$

となる。

また、全ての正整数 n で

$$5 - \frac{2}{n} \leq b_n \leq 5 + \frac{1}{n}$$

が成り立つ。

したがって、はさみうちの原理より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 5$$

である。

練習問題 2 の解答・解説

$-1 \leq \sin n \leq 1$ であり、正整数 n では $n > 0$ なので、 n で割ると不等号の向きは変わらない。

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

となる。

上下の数列について、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

である。

したがって、はさみうちの原理より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

である。

ここでは $\sin n$ 自体の極限を求めたり、存在を仮定したりしていない。

練習問題 3 の解答・解説

$(-1)^n$ は 1 または -1 のどちらかであるため、

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

が成り立つ。

$n^2 + 1 > 0$ なので、正の数で割ることができる。

$$-\frac{1}{n^2 + 1} \leq \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} \leq \frac{1}{n^2 + 1}$$

となる。

上側の数列について、

$$\frac{1}{n^2 + 1} = \frac{\frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}}$$

であり、分子は 0、分母は 1 に近づき、分母の極限は $1 \neq 0$ であるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 + 1} = 0$$

となる。負号を付けた下側の数列も同じく極限は 0 である。

したがって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} = 0$$

である。

練習問題 4 の解答・解説

$-1 \leq \cos n \leq 1$ より、

$$0 \leq \cos^2 n \leq 1$$

である。

$n + 1 > 0$ なので、

$$0 \leq \frac{\cos^2 n}{n + 1} \leq \frac{1}{n + 1}$$

となる。

上下の数列について、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n + 1} = 0$$

である。

したがって、はさみうちの原理より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos^2 n}{n + 1} = 0$$

である。

ここでも $\cos n$ 自体の極限は必要ない。

練習問題 5 の解答・解説

$-1 \leq \sin n \leq 1$ であり、 $n^2 > 0$ なので、

$$-\frac{1}{n^2} \leq \frac{\sin n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

となる。

両辺に 3 を加える。

$$3 - \frac{1}{n^2} \leq 3 + \frac{\sin n}{n^2} \leq 3 + \frac{1}{n^2}$$

上下の数列は、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{n^2} \right) = 3$$

かつ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{n^2} \right) = 3$$

となる。

したがって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$$

である。

練習問題 6 の解答・解説

絶対値の条件を不等式に変換する。

$$|b_n + 2| \leq \frac{4}{n}$$

より、

$$-\frac{4}{n} \leq b_n + 2 \leq \frac{4}{n}$$

となる。

両辺から 2 を引くと、

$$-2 - \frac{4}{n} \leq b_n \leq -2 + \frac{4}{n}$$

を得る。

上下の数列について、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-2 - \frac{4}{n} \right) = -2$$

かつ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-2 + \frac{4}{n} \right) = -2$$

である。

したがって、はさみうちの原理より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -2$$

である。

練習問題 7 の解答・解説

最初の 9 項は任意であり、条件は $n \geq 10$ から成立する。

極限では、初めの有限個の項は影響しない。

したがって、十分大きな番号以降で

$$-\frac{1}{n} \leq b_n \leq \frac{2}{n}$$

が成り立つことだけを考えればよい。

上下の数列について、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} \right) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0$$

である。

よって、はさみうちの原理より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

である。

有限個の例外項があっても、極限は変化しない。

練習問題 8 の解答・解説

下側の数列は定数列 0 で極限は 0、上側の数列は定数列 1 で極限は 1 であり、上下の極限值は異なる。したがって、この条件だけから真ん中の数列の極限を一意に決定することはできない。実際、条件を満たす 2 つの数列を考える。

定数列 $b_n = 0$

では、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

となる。

一方、定数列 $b_n = 1$

では、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$$

となる。

この 2 つは同じ条件を満たすが極限が異なるため、極限は一意に決められない。

また、 $b_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$ とすると、奇数項では 0、偶数項では 1 となり、発散する。

したがって、この条件だけでは収束も発散も決定できない。

はさみうちの原理を適用できないことと、必ず発散することは別である。